И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ СПО

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебника и практикума для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва • Юрайт • 2019

УДК 517(075.32)
ББК 22.161я723
С14

Авторы:

Садовничая Инна Викторовна — доцент, доктор физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Фоменко Татьяна Николаевна — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Рецензенты:

Ильин В. А. — доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, Академик Международной академии наук высшей школы, лауреат Государственной премии СССР и Премии президента Российской Федерации в области образования;

Тихомиров В. В. — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики, заместитель декана по учебно-методической работе факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Фомичев В. В. — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Садовничая, И. В.

С14 Математический анализ. Функции многих переменных : учебник и практикум для СПО / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 206 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-06597-8

Настоящий учебник посвящен изучению темы «Функции многих переменных». Издание состоит из двух частей. В первой части приводится изложение теоретического материала, снабженное примерами, облегчающими усвоение рассматриваемых понятий. В ней рассматриваются n-мерное евклидово пространство, предел и непрерывность функции n переменных. Изучаются дифференцируемость и свойства дифференцируемых функций, понятие локального экстремума функции многих переменных, а также понятия неявной функции и зависимости и независимости функций.

Вторая часть учебника содержит набор задач к каждому параграфу первой части. Ко всем задачам даны ответы, что дает возможность студенту работать с книгой самостоятельно.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, преподавателей и всех интересующихся.

УДК 517(075.32)
ББК 22.161я723

ISBN 978-5-534-06597-8

Оглавление

Предисловие 5

Часть первая — Теория

§1. Пространство $\mathbf{R}^n$ 9

§2. Предел функции многих переменных 17

§3. Непрерывность функции многих переменных 25

§4. Дифференцирование функции многих переменных 33

4.1. Частные производные 33

4.2. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных. Касательная плоскость к поверхности 36

4.3. Дифференцируемость сложной функции 40

4.4. Инвариантность формы записи первого дифференциала 42

§5. Производная по направлению. Градиент функции. Частные производные высших порядков 45

5.1. Градиент и производная по направлению 45

5.2. Частные производные высших порядков 48

§6. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора 57

6.1. Дифференциалы высших порядков 57

6.2. Формула Тейлора 59

§7. Локальный экстремум функции многих переменных 70

7.1. Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума 70

7.2. Случай функции двух переменных 75

§8. Неявная функция 79

8.1. Условия существования неявной функции 81

8.2. Вычисление частных производных второго порядка от неявных функций 87

§9. Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений 90

9.1. Условия существования системы неявных функций 90

9.2. Вычисление частных производных системы неявных функций ... 98

§10. Зависимость и независимость функций 100

10.1. Достаточные условия независимости функций 101
10.2. Функциональные матрицы и их приложения 103
§11. Условный локальный экстремум. Функции многих переменных 110
11.1. Необходимые условия существования условного экстремума 112
11.2. Метод неопределённых множителей Лагранжа 115

Часть вторая — Задачи

Задачи к §1 123
Задачи к §2 126
Задачи к §3 130
Задачи к §4 139
Задачи к §5 148
Задачи к §6 156
Задачи к §7 161
Задачи к §8 166
Задачи к §9 175
Задачи к §10 181
Задачи к §11 191
Список литературы 203
Новые издания по дисциплине «Математический анализ» и смежным дисциплинам 204

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Уважаемые читатели! Наш учебник содержит материал по теме «Функции многих переменных» в объёме программы по математическому анализу для студентов математических специальностей образовательных учреждений среднего профессионального образования. Учебник состоит из двух частей. В первой части излагается теоретический материал, а во второй части содержится набор задач по всем затронутым вопросам.

Первая часть учебника содержит 11 параграфов, в которых освещены все теоретические разделы данной темы.

Мы рассматриваем пространство R^n, описываем его основные свойства, множества и последовательности в нём, критерий сходимости и основные свойства сходящихся последовательностей. Затем обсуждается понятие предела (предельного значения) функции n-переменных, критерий существования предела и основные свойства функций, имеющих пределы. Понятие предела функции подводит читателя к рассмотрению понятия непрерывности функции n-переменных. Здесь мы рассматриваем различные определения непрерывности функции в точке, основные свойства функций, непрерывных в точке и на множестве, а также понятие равномерной непрерывности функции на множестве.

Следующий раздел посвящен дифференцируемости функции многих переменных, где излагаются понятия частных производных, дифференцируемости функции в точке, необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных мы поясняем в терминах связи этого понятия с существованием касательной плоскости к графику функции. Рассматривается понятие дифференциала функции и его основные свойства. Затем мы переходим к обобщению понятия частных производных и рассматриваем производную функции по направлению. В связи с этим изучается понятие градиента функции и его основные свойства. Далее излагаются частные производные высших порядков и их свойства. Затем мы вводим понятие n-кратной дифференцируемости функции n-переменных, приводим необходимые и достаточные условия равенства смешанных частных производных, правила вычисления этих величин. После этого вводится понятие кратного дифференциала функции многих переменных и рассматривается разложение её по формуле Тейлора с остаточным членом в различных формах (в форме Лагранжа, в интегральной форме, в форме Пеано).

Следующий важный раздел связан с понятием локального экстремума функции многих переменных. Здесь мы рассматриваем определение локального экстремума, необходимые и достаточные условия существования и алгоритм отыскания точек локального экстремума функции. Отдельно рассматривается случай функции двух переменных.

Далее мы переходим к изучению понятия неявной функции. Обсуждается понятие неявной функции, достаточные условия её существования и единственности, непрерывности и дифференцируемости, а также правила вычисления частных производных неявной функции первого и второго порядков. Аналогичным образом рассматривается вопрос о системе неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений. Мы вводим понятие системы неявных функций, определяемой системой функциональных уравнений, рассматриваем достаточные условия её существования, единственности и дифференцируемости, правила вычисления частных производных системы неявных функций.

Затем мы излагаем понятие (гладкой) зависимости и независимости функций, рассматриваем достаточные условия независимости системы функций в терминах определителей и миноров соответствующих функциональных матриц. В качестве приложения обсуждаем задачи о замене переменных в дифференциальных выражениях.

Последний раздел посвящён понятию условного локального экстремума функции многих переменных, где мы рассматриваем понятие условного локального экстремума, приводим необходимые и достаточные условия его существования и правила отыскания, в том числе методом неопределённых множителей Лагранжа.

В конце каждого параграфа мы формулируем несколько вопросов и упражнений для контроля усвоения материала параграфа. Изложение снабжено примерами, облегчающими понимание рассматриваемых понятий и теорем.

Мы включили в текст первой части иллюстрации, чтобы облегчить таким образом восприятие наиболее важных вводимых понятий, таких как локальный экстремум, неявная функция, условный локальный экстремум функции многих переменных.

Каждый параграф имеет свою нумерацию теорем, лемм, примеров, формул, утверждений. Ссылки на них приводятся в таком виде: «теорема 1 из параграфа 5» и т.п.

Во ***второй части*** учебника мы предлагаем набор задач к каждому параграфу первой части. При этом часть задач приводится с подробными решениями, а остальные мы даём для самостоятельной работы студентов. Наряду с вычислительными задачами, мы приводим довольно много задач на доказательство, полагая их решение одной из наиболее эффективных форм усвоения теоретического материала.

Все задачи снабжены ответами, а в некоторых случаях указаниями к решению.

В конце мы приводим список литературы, где перечисляем учебники и задачники, которые использовались нами при написании данной книги, а также книги для дальнейшего знакомства с темой «Функции многих переменных». Отметим, что первая (теоретическая) часть данного учебника изложена в основном в соответствии с книгой [1]. Материалы для практических заданий во второй части излагаются частично на основе задачников [4] и [5]. Остальные учебники предлагаются для тех, кто хочет более подробно и широко ознакомиться с данной темой.

В результате изучения данной темы читатели познакомятся с основными объектами и понятиями из теории функций многих переменных. Читатели освоят ***трудовые действия*** владения логикой и приемами доказательств соответствующих утверждений и терминологией, связанной с теорией функций многих переменных. Они освоят ***необходимые умения*** самостоятельно проводить исследования поведения функций многих переменных и решать численные задачи. Они освоят ***необходимые знания*** основных терминов и фактов, связанных с понятиями предела, непрерывности и дифференцируемости функций многих переменных, принципов доказательств основных теорем.

Данный учебник предназначен в первую очередь для студентов первых курсов ВУЗов, изучающих математический анализ. Мы надеемся, что он также будет полезен школьникам старших классов, школьным учителям и преподавателям при изучении (или преподавании) данной темы.

И.В. САДОВНИЧАЯ, Т.Н. ФОМЕНКО.

§1.
ПРОСТРАНСТВО R^n.

В этом параграфе мы рассмотрим ряд понятий, которые подготовят читателя к изучению теории функций многих переменных. К ним относятся понятие пространства R^n, различные подмножества в R^n и их свойства, последовательности в R^n и условия их сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *n-мерным вещественным координатным пространством* называется множество $R^n = \{x = (x_1,...,x_n) \mid x_i \in R,\ i = 1,...,n\}$, элементы которого называются точками (или n-мерными векторами), а числа x_k - *координатами* точки (вектора) $x \in R^n$.

Из курса линейной алгебры известно, что множество R^n с заданными в нём операциями сложения двух элементов и умножения элемента на вещественное число, определяемыми по правилам:

$$x + y = (x_1 + y_1,\ldots,x_n + y_n),\ \lambda x = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n),$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n) \in R^n$, $\lambda \in R$, -

-является *n-мерным линейным пространством,* и набор элементов:

$$Б = \{e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0),..., e_n = (0,...,0,1)\} -$$

является в нём (стандартным) базисом.

Линейное пространство R^n (с указанными операциями сложения и умножения на скаляры) является *n-мерным евклидовым пространством* относительно скалярного произведения: $(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. В нем можно ввести *норму* элемента x: $\|x\| = (x,x) = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2}$, - а также *расстояние(метрику)* между элементами x и y по следующему правилу:

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Таким образом, пространство R^n может рассматриваться как *линейное нормированное пространство* размерности n, или как *метрическое пространство*.

Отметим, что скалярное произведение (а следовательно, и норма, и метрика) в R^n может вводиться и другими способами. Мы в данном пособии будем пользоваться указанными выше способами их задания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (шар, сфера, параллелепипед). *Открытым n-мерным шаром* радиуса R с центром в точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ называется множество $B_R(x_0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x_0) < R\}$. *Замкнутым n-мерным шаром* радиуса R с центром в точке x_0 называется множество $\overline{B}_R(x_0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x_0) \le R\}$. *n-мерной сферой* радиуса R с центром в точке x_0 называется множество $S_R(x_0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x_0) = R\}$. Множество $\Pi_d(x_0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid |x_1 - x_{01}| < d_1, \dots, |x_n - x_{0n}| < d_n\}$, где $d_1 > 0, \dots, d_n > 0$, называется *открытым n-мерным параллелепипедом* размера $d = (d_1, \dots, d_n)$ с центром в точке x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *(Шаровой) ε-окрестностью* точки $x_0 \in R^n$ называется открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x_0. Для обозначения ε-окрестности часто применяют специальное обозначение $U_\varepsilon(x_0)$ (или просто $U(x_0)$).

Множество $\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ часто называют *проколотой ε-окрестностью* точки x_0.

Следующие понятия внутренней, внешней, граничной точки, а также открытого и замкнутого множества в R^n полностью аналогичны соответствующим понятиям в R^2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $M \subseteq R^n$. Точка $x \in M$ называется *внутренней* точкой множества M, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset M$. Точка $x \in R^n \setminus M$ называется *внешней* точкой множества M, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset R^n \setminus M$. Точка $x \in R^n$ называется *граничной* точкой множества M, если она не является ни внутренней, ни внешней его точкой. Совокупность всех граничных точек множества называется его *границей*. Точка x_0 называется *предельной* точкой множества $M \subset R^n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ пересечение $x \in \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) \cap M$ - непусто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество $M \subset R^n$ называется *открытым*, если все его точки – внутренние. Множество $M \subset R^n$ называется *замкнутым*, если множество $R^n \setminus M$ открыто.

Везде ниже *(открытой) окрестностью точки* мы будем называть всякое (открытое) множество, содержащее некоторую ε-окрестность этой точки.

Приведем несколько эквивалентных утверждений, каждое из которых может служить определением замкнутого множества. В дальнейшем мы сможем пользоваться тем из определений, которое нам будет удобно в данный момент.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Множество A замкнуто (по определению 5);*
2) *множество A содержит все свои предельные точки;*
3) *множество A содержит все свои граничные точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1) \Rightarrow 2)$. Пусть $x_0 \in R^n \setminus A$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset R^n \setminus A$ (так как дополнение к замкнутому множеству открыто). Значит, $U_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A = \varnothing$. Это означает, что точка x_0 не является предельной точкой множества A (поскольку в любой окрестности предельной точки должен содержаться хотя бы один элемент множества, отличный от этой точки). Значит, A содержит все свои предельные точки.

$2) \Rightarrow 3)$. Пусть x_0 - граничная точка множества A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ пересечение ε-окрестности точки x_0 с множеством A не пусто. Пусть $x_0 \notin A$. Тогда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$: $\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$. Это означает, что x_0 - предельная точка A. Но по условию, множество A содержит все свои предельные точки. Мы пришли к противоречию. Значит, A содержит все свои граничные точки.

$3) \Rightarrow 1)$. Пусть точка $x_0 \in R^n \setminus A$. Тогда x_0 - внешняя точка множества A (так как по условию, A содержит все свои внутренние и граничные точки). Значит, существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset R^n \setminus A$ (по определению внешней точки). Это означает, что множество $R^n \setminus A$ открыто. Значит, множество A замкнуто. Утверждение 1 полностью доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество $A \subset R^n$ называется *ограниченным*, если существует число $R > 0$ такое, что $A \subset B_R(0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Непрерывной кривой* в R^n называется множество

$$L = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)\},$$

где $t \in [\alpha, \beta]$ и все функции $\varphi_k(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Будем говорить, что точку $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n})$ и точку $x_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2n})$ *можно соединить непрерывной кривой*, если существуют такие функции $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$, что

$x_{11}=\varphi_1(\alpha),\ldots,x_{1n}=\varphi_n(\alpha)$, $x_{21}=\varphi_1(\beta),\ldots,x_{2n}=\varphi_n(\beta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Множество $A\subset R^n$ называется *линейно связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в A. *Областью* называется всякое открытое линейно связное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Если каждому натуральному числу поставить в соответствие какую-либо точку пространства R^n, то полученное множество точек $x_1,x_2,\ldots,x_m,\ldots$ называется *последовательностью* точек в R^n и обозначается $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ или $\{x_m\}_{m=0,1,\ldots}$.

Говорят, что последовательность $\{x_m\}$ *сходится*, если существует точка $a\in R^n$ такая, что для любого $\varepsilon>0$ найдется натуральное число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $m\ge N$ выполнено: $\rho(x_m,a)<\varepsilon$. Точка a называется *пределом* последовательности. Обозначение:

$$\lim_{m\to\infty}x_m=a \text{ или } x_m\xrightarrow[m\to\infty]{}a.$$

ЛЕММА 1. *Последовательность $\{x_m\}$ сходится к точке $a=(a_1,\ldots,a_n)$ тогда и только тогда, когда*

$$x_{m1}\xrightarrow[m\to\infty]{}a_1,\ \ldots,\ x_{mn}\xrightarrow[m\to\infty]{}a_n,$$

где $x_m=(x_{m1},\ldots,x_{mn})$ (т.е. последовательность сходится тогда и только тогда, когда она сходится по-координатно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=a$. Значит, для любого $\varepsilon>0$ найдется $N=N(\varepsilon)$ такое, что для любого $m\ge N$ выполнено неравенство: $\sqrt{(x_{m1}-a_1)^2+\ldots+(x_{mn}-a_n)^2}<\varepsilon$.

Тогда очевидно, что: $|x_{m1}-a_1|<\varepsilon,\ldots,|x_{mn}-a_n|<\varepsilon$ для любого $m\ge N$. Значит,

$$x_{m1} \xrightarrow[m\to\infty]{} a_1, \ \ldots, \ x_{mn} \xrightarrow[m\to\infty]{} a_n .$$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть сходятся координатные последовательности: $x_{m1} \xrightarrow[m\to\infty]{} a_1, \ \ldots, \ x_{mn} \xrightarrow[m\to\infty]{} a_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа $N_k = N_k(\varepsilon)$, $k = 1,2,\ldots,n$, такие, что для любого m, $m \ge N_k$ верно: $|x_{mk} - a_k| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Пусть $N = \max\{N_1,\ldots,N_n\}$. Тогда для любого $m \ge N$ имеем:

$$\|x_m - a\| = \sqrt{(x_{m1} - a_1)^2 + \ldots + (x_{mn} - a_n)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon .$$

Значит, $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$. Лемма 1 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Последовательность $\{x_m\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $m \ge N$ и для любого натурального p выполнено: $\rho(x_{m+p}, x_m) < \varepsilon$.

ЛЕММА 2. *Последовательность $\{x_m\}$ является фундаментальной тогда и только тогда, когда фундаментальна каждая из координатных последовательностей $\{x_{m1}\}$, ..., $\{x_{mn}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 аналогично доказательству леммы 1. Оно предоставляется читателю в качестве упражнения.

ТЕОРЕМА 1 (критерий Коши сходимости последовательности). *Последовательность $\{x_m\}$ то-чек пространства R^n сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда она фундаментальна покоординатно (лемма 2). Каждая из координатных последовательностей является обычной числовой последовательностью. Она сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна (критерий Коши сходимости числовой последовательности). Но последовательность точек R^n сходится тогда и только тогда, когда она сходится по-координатно (лемма 1). Значит, последовательность точек пространства R^n сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Последовательность $\{x_m\}$ точек пространства R^n *ограничена*, если существует число $R > 0$ такое, что $x_m \subset B_R(0)$ для любого натурального m.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$ где $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ - натуральные числа. Последовательность $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_m\}$.

ТЕОРЕМА 2 (Больцано-Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности $\{x_m\}$ точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\{x_m\}$ ограничена, значит, существует число $R > 0$ такое, что $\sqrt{(x_{m1})^2 + \ldots + (x_{mn})^2} < R$ для любого натурального m. Тогда очевидно, что для любого $m \geq N$: $|x_{m1}| < R$, ..., $|x_{mn}| < R$, то есть числовые последовательности $\{x_{m1}\}$, ..., $\{x_{mn}\}$ ограничены.

Выделим из последовательности $\{x_{m1}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_{k_1}1}\}$, $x_{m_{k_1}1} \xrightarrow[k_1 \to \infty]{} a_1$ (теорема Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей). Рассмотрим последовательность $\{x_{m_{k_1}2}\}$. Она ограничена (как подпоследовательность ограниченной последовательности), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_{k_2}2}\}$, $x_{m_{k_2}2} \xrightarrow[k_2\to\infty]{} a_2$. И так далее. В конце концов, из последовательности $\{x_{m_{k_{n-1}}n}\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_{k_n}n}\}$, $x_{m_{k_n}n} \xrightarrow[k_n\to\infty]{} a_n$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{x_{m_{k_n}}\}$. Так как все её координатные последовательности сходятся: $x_{m_{k_n}1} \xrightarrow[k_n\to\infty]{} a_1$, ..., $x_{m_{k_n}n} \xrightarrow[k_n\to\infty]{} a_n$, - то и сама последовательность также сходится к точке $a = (a_1, \dots, a_n)$ (лемма 1). Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §1.

1) Докажите, что следующее определение предельной точки множества эквивалентно определению 4: Точка x_0 называется предельной точкой множества $A \subset R^n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности точки x_0 содержится бесконечно много точек множества A.

2) Является ли единичная сфера в пространстве R^n открытым множеством? Замкнутым? Приведите пример множества в R^n, которое не является ни замкнутым, ни открытым.

3) Приведите пример неограниченной последовательности точек пространства R^n из которой, тем не менее, можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

---

§2.
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В данном параграфе мы рассмотрим понятие функции n переменных и обсудим важнейшее понятие предела функции и условия его существования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если каждой точке x из множества $X \subset R^n$ ставится в соответствие по определённому закону действительное число $f(x)$, то говорят что на множестве X задана *функция n переменных* $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in X$. Множество X называется при этом *областью определения* функции $f(x)$ и обозначается D_f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (предел функции по Коши). Число $b\in R$ называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $a\in R^n$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любой точки $x\in D_f$ такой, что $0<\rho(x,a)<\delta$, выполнено: $|f(x)-b|<\varepsilon$. Обозначения:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \ldots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,\ldots,x_n)=b.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2' (предел функции по Гейне). Число $b\in R$ называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $a\in R^n$, если для любой последовательности аргументов $\{x_m\}$, $x_m\xrightarrow[m\to\infty]{}a$, $x_m\neq a$, соответствующая последовательность значений функции стремится к b: $f(x_m)\xrightarrow[m\to\infty]{}b$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Определения 2 и 2' предела функции многих переменных эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$(2)\Rightarrow(2')$. Пусть число A является пределом функции $f(x)$ в точке a по определению 2 (по Коши). Покажем, что тогда выполнено и условие определения 2'. В самом деле, пусть

$\{x_m\}$ - произвольная последовательность, сходящаяся к точке a. Зададим любое число $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно определению 2, существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x, 0 < \rho(x,a) < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$. По числу δ для последовательности $\{x_m\}$ найдётся такой номер $N = N(\delta) \in N$, что для всех $m, m > N$, будет $\rho(x_m, a) < \delta$, а следовательно, и $|f(x_m) - A| < \varepsilon$. Это означает, что предел $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_m) = A$. Таким образом, условия определения предела по Гейне выполнены.

$(2') \Rightarrow (2)$. Пусть теперь выполнены условия определения $(2')$. Предположим, что определение по Коши не было бы выполнено. Это означало бы, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$, например, для $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, имеется точка x_n, $\rho(x_n, a) < \delta_n$, но $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Это противоречит определению по Гейне, так как последовательность $\{x_n\}$ в этом случае сходится к точке a, но последовательность $\{f(x_n)\}$ не сходится к числу A. Утверждение 1 полностью доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что $x \to \infty$, если $\|x\| \to +\infty$. Число $b \in R$ называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$ такой, что $\|x\| > \delta$, выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве $X \subset R^n$, и существуют пределы:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. *Тогда существуют пределы:*

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c, \quad \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b \cdot c,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}\ (\text{если } c\neq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $\{x^m\}$ точек множества X такую, что $x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$, $x^m\neq a$. Тогда $f(x^m)\xrightarrow[m\to\infty]{} b$, $g(x^m)\xrightarrow[m\to\infty]{} c$ (определение предела по Гейне). В силу свойств числовых последовательностей получаем: $(f(x^m)\pm g(x^m))\xrightarrow[m\to\infty]{} b\pm c$,

$(f(x^m)\cdot g(x^m))\xrightarrow[m\to\infty]{} b\cdot c$, $\dfrac{f(x^m)}{g(x^m)}\xrightarrow[m\to\infty]{}\dfrac{b}{c}$ (если $c\neq 0$).

Отсюда и из определения предела функции по Гейне следует утверждение теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f(x)$ *удовлетворяет условию Коши в точке* $a\in R^n$ *(или при* $x\to\infty$*)*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых двух точек $x',x''\in D_f$, для которых $0<\rho(x',a)<\delta$, и $0<\rho(x'',a)<\delta$ (или $\|x'\|>\delta,\|x''\|>\delta$), выполнено неравенство: $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 2 (критерий Коши существования предела функции многих переменных). *Функция* $f(x)$ *имеет конечный предел в точке* $a\in R^n$ *(или при* $x\to\infty$*) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши в точке* a *(или при* $x\to\infty$*).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем проводить доказательство для случая, когда $a\in R^n$ (случай $a=\infty$ рассматривается аналогично).

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\lim_{x\to a}f(x)=b$. Зафиксируем число $\varepsilon>0$. Тогда найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых точек $x',x''\in D_f$, $0<\rho(x',a)<\delta$, $0<\rho(x'',a)<\delta$, выполнено: $|f(x')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ (определение предела функции по Коши). Значит,

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-b|+|f(x'')-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

то есть в точке a выполнено условие Коши.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a. Выберем последовательность аргументов $\{x^m\}$ такую, что $x^m\xrightarrow[m\to\infty]{}a$, $x^m\ne a$. Пусть $\varepsilon>0$ - произвольное число. Согласно критерию Коши, найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых точек $x',x''\in D_f$, $0<\rho(x',a)<\delta$, $0<\rho(x'',a)<\delta$, выполнено: $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Так как $x^m\xrightarrow[m\to\infty]{}a$, то существует натуральный номер N такой, что $0<\rho(x^m,a)<\delta$ для любого $m\ge N$. Тем более, $0<\rho(x^{m+p},a)<\delta$ для любого натурального числа p и любого $m\ge N$. Значит, $|f(x^{m+p})-f(x^m)|<\varepsilon$.

Мы показали, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное N, что для любого $m\ge N$, для любого натурального p выполнено: $|f(x^{m+p})-f(x^m)|<\varepsilon$. Это означает в точности, что числовая последовательность $\{f(x^m)\}$ фундаментальна. Значит, она сходится (критерий Коши сходимости числовых последовательностей).

Осталось показать, что для любого выбора последовательности аргументов $\{x^m\}$ все последовательности значений функции $\{f(x^m)\}$ будут сходиться к одному и тому же числу. Пусть $x^m\xrightarrow[m\to\infty]{}a$, $x^m\ne a$, $y^m\xrightarrow[m\to\infty]{}a$, $y^m\ne a$; $f(x^m)\xrightarrow[m\to\infty]{}b$, $f(y^m)\xrightarrow[m\to\infty]{}c$. Рассмотрим следующую последовательность аргументов :

$$\{z^m\} = \{x^1, y^1, x^2, y^2, \ldots, x^m, y^m, \ldots\}.$$

Легко видеть, что $z^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$, $z^m \neq a$. Значит, по уже доказанному нами, существует число d такое, что $f(z^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} d$. Но последовательности $\{f(x^m)\}$ и $\{f(y^m)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(z^m)\}$ и должны сходиться к тому же пределу. Отсюда получаем, что $b = c = d$. Теорема полностью доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке $a \in R^n$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Обозначение: $f(x) = \bar{o}(1)$, $x \to a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $(x_0, y_0) \in R^2$. Если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа y, $y \in \overset{o}{U}_\varepsilon(y_0)$, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ и существует $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = b$, то говорят, что существует *повторный предел* $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = b$. Аналогично можно определить повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$.

Заметим, что существование повторных пределов функции в точке и существования ее предела как функции двух переменных (такой предел называют также *двойным*) не эквивалентны. Приведем соответствующие примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$

Если $y \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0$, значит, $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x,y) = 0$. Аналогично $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x,y) = 0$. Покажем, что не существует $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$. Рассмотрим две последовательности: $\{(x_m, y_m)\} = \left\{\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m}\right\}$ и $\{(x'_m, y'_m)\} = \left\{\dfrac{1}{m}, -\dfrac{1}{m}\right\}$. Тогда $\{(x_m, y_m)\} \xrightarrow[m \to \infty]{} (0,0)$, $\{(x'_m, y'_m)\} \xrightarrow[m \to \infty]{} (0,0)$, но $\{f(x_m, y_m)\} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $\{f(x'_m, y'_m)\} = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, то есть для различных последовательностей аргументов, стремящихся к точке $(0,0)$, соответствующие последовательности значений функции могут сходиться к разным числам. Это означает, что функция $f(x,y)$ не имеет предела в точке $(0,0)$. Значит, из существования обоих повторных пределов не следует существования двойного предела.

Покажем, что и из существования двойного предела не следует существование повторных.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}.$$

Если $x^2 + y^2 \to 0$, то $f(x,y) \to 0$ (как произведение бесконечно малой функции на ограниченную). Значит, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0$ по определению предела функции по Коши.

Покажем, что не существует ни один из повторных пределов (поскольку переменные входят в нашу функцию симметричным образом, то достаточно рассмотреть один из таких пределов). Пусть, например, $y \neq 0$. Тогда очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0} y^2 \sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ не существует. Значит, не существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ при любом фиксированном $y \neq 0$, и тем более, не существует предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Легко показать также, что у функции могут существовать двойной и один из повторных пределов, но не быть второго повторного предела. Для этого немного изменим функцию из примера 2:

ПРИМЕР 3. Пусть $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, однако повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не существует (проверьте это самостоятельно!)

И наконец, рассмотрим пример того, что оба повторных предела могут существовать, но не быть равными.

ПРИМЕР 4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

Тогда ясно, что $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = -1$, а $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 1$. Покажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ в этом случае не существует.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §2 .

1) Покажите, что для функции $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует, однако оба повторных предела существуют, причём $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\}=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\}=-1$.

2) Является ли бесконечно малой в точке $(1,1)$ функция

a) $f(x,y)=\dfrac{x-1}{y}$? b) $f(x,y)=\dfrac{x-1}{y-1}$?

3) Пусть известно, что для некоторой функции $f(x,y)$ существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$ и один из повторных пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=c$. Докажите, что в этом случае $b=c$.

§3.
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В данном параграфе мы обсудим понятие непрерывности функции многих переменных в точке и на множестве, а также свойства непрерывных функций.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $X \subset R^n$, $a \in X$, и точка a является предельной точкой множества X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (формальное). Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Уточним это формальное определение в следующих двух вариантах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'. (по Коши). Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$, для которой $\rho(x, a) < \delta$, выполнено: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'' (по Гейне). Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если для любой последовательности аргументов $\{x^m\}$, $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, соответствующая последовательность значений функции сходится к $f(a)$: $f(x^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} f(a)$.

Эквивалентность определений 1, 1' и 1'' следует из эквивалентности определений предела функции по Кощи и по Гейне.

Пусть множество $X \subset R^n$ таково, что любая его точка является для него предельной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *непрерывной на этом множестве*, если она непрерывна в каждой точке $x \in X$.

Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - a_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - a_n$ - *приращения аргументов*. Тогда следующую величину:

$\Delta f(x) = f(x) - f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ - будем называть *(полным) приращением* функции $f(x)$ в точке a.

Отметим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a} \Delta f(x) = 0$, что равносильно утверждению: $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f(x) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим через $\Delta_k f(x) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ - *частное приращение* функции $f(x)$ в точке a, соответствующее приращению аргумента Δx_k. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a по переменной* x_k, если $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \Delta_k f(x) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция непрерывна в некоторой точке, то она, очевидно, непрерывна в этой точке по каждой из переменных. Обратное, вообще говоря, неверно. Приведём соответствующий пример.

ПРИМЕР 1. Пусть $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. Тогда

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(0+\Delta x, 0) - f(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} - 1\right) = 0$. Значит, функция $f(x,y)$ непрерывна по x в точке $(0,0)$. Аналогично доказывается непрерывность по y в точке $(0,0)$. Однако $f(x,y)$ не является непрерывной в начале координат: пусть $x_m = \frac{1}{m}$, $y_m = -\frac{1}{m}$, тогда $f(x_m, y_m) \equiv 0$. Мы получили, что последовательность $\{(x_m, y_m)\} \xrightarrow[m\to\infty]{} (0,0)$, но $\{f(x_m, y_m)\}$ не стремится при $m \to \infty$ к $f(0,0) = 1$, то есть функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $(0,0)$ по совокупности аргументов (т.к. не выполняется определение Гейне).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $X \subset R^n$. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a \in X$, то функции $(f(x) \pm g(x))$, $(f(x) \cdot g(x))$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 следует из определения непрерывности функции в точке и теоремы об арифметическими операциями над функциями, имеющими предел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k)$,..., $x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_k)$ - заданы на множестве $T \subset R^k$. Тогда любой точке $t \in T$ можно поставить в соответствие точку $x = (x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in R^n$. Пусть $X \subset R^n$ - множество всех таких точек x. Если на множестве X задана функция $f(x): X \to R$, то говорят, что на множестве T задана *сложная функция*

$$f(x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_k)) = f(x(t)) : T \to R$$

ТЕОРЕМА 2 **(о непрерывности сложной функции).** *Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k)$, ..., $x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_k)$ непрерывны в точке $a = (a_1, \ldots, a_k) \in T$, а функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в точке $b = (b_1, \ldots, b_n)$, где $b_j = \varphi_j(a_1, \ldots, a_k)$,*

$j=1,\dots,n$. *Тогда сложная функция* $f(x(t))$ *непрерывна в точке* a.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность точек $\{t^m\}=\{(t_1^m,\dots,t_k^m)\}$ множества T сходится к некоторой точке $a=(a_1,\dots,a_k)\in T$. Обозначим $x_j^m=\varphi_j(t_1^m,\dots,t_k^m)$, $j=1,\dots,n$; $\{x^m\}=\{(x_1^m,\dots,x_n^m)\}$. Так как все функции $\varphi_j(t)$ непрерывны в точке a, то последовательность $\{x^m\}$ сходится к $b=(\varphi_1(a),\dots,\varphi_n(a))$ (здесь мы пользуемся определением непрерывности функции по Гейне, а также тем фактом, что последовательность точек пространства R^n сходится тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно). Поскольку функция $f(x_1,\dots,x_n)$, в свою очередь, непрерывна в точке $b=(b_1,\dots,b_n)$, где $b_j=\varphi_j(a_1,\dots,a_k)$, то числовая последовательность $\{f(x^m)\}$ сходится к $f(b)$. Мы получили, что для любой последовательности аргументов $\{t^m\}=\{(t_1^m,\dots,t_k^m)\}$, сходящейся к точке a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x(t^m))\}$ сходится к $f(x(a))$. Это означает, что сложная функция $f(x(t))$ непрерывна в точке a. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3 (о сохранении знака непрерывной функцией). *Если функция* $f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* $a\in R^n$, *непрерывна в точке* a *и* $f(a)>0$ (<0) *то существует число* $\delta>0$ *такое, что* $f(x)>0$ (<0) *для любой точки* $x\in U_\delta(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(a)>0$ (случай противоположного знака рассматривается аналогично). Обозначим $\varepsilon=\dfrac{f(a)}{2}$. Тогда $\varepsilon>0$ и существует $\delta>0$ такое, что

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ для любого x, $\rho(a,x)<\delta$ (определение Коши непрерывности функции в точке). Раскрывая модуль, получим: $0<\frac{f(a)}{2}<f(x)<\frac{3f(a)}{2}$ для любого $x\in U_\delta(a)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть множество* $X\subset R^n$ *линейно связно, и функция* $f(x)$ *непрерывна в каждой точке множества* X. *Если точки* $a,b\in X$, *а число* γ *лежит между числами* $f(a)$ *и* $f(b)$, *то на любой непрерывной кривой, соединяющей точки* a *и* b *и принадлежащей множеству* X, *найдется точка* c *такая, что* $f(c)=\gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кривая L задается уравнениями $x_1=\varphi_1(t)$, ..., $x_n=\varphi_n(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, и все функции $\varphi_k(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем L целиком принадлежит множеству X. Тогда на отрезке $[\alpha,\beta]$ задана функция $f(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, которая является непрерывной на $[\alpha,\beta]$ по теореме о непрерывности сложной функции. Поскольку $f(x(t))$ является числовой функцией аргумента t, то (по теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение) для любого числа γ, лежащего между $f(x(\alpha))$ и $f(x(\beta))$, найдется точка $\xi\in[\alpha,\beta]$ такая, что $f(x(\xi))=\gamma$. Пусть $c\in R^n$ - точка с координатами $(\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi))$. Тогда $c\in L$, $f(c)=\gamma$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на замкнутом ограниченном множестве* $X\subset R^n$, *то она ограничена на этом множестве.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так. Тогда для любого натурального числа m найдется точка $x^m\in X$ такая, что $|f(x^m)| > m$. Последовательность $\{x^m\}$ ограничена (поскольку ограничено множество X), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_m}\}$ (теорема Больцано-Вейерштрасса). Пусть $x^{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$. Так как множество X замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки. Следовательно, $x_0 \in X$. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и последовательность $\{f(x^{k_m})\}$ должна сходиться при $m \to \infty$ к числу $f(x_0)$. Но последовательность $\{f(x^{k_m})\}$ - бесконечно большая (так как $|f(x^{k_m})| > k_m$ для любого m). Значит, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ ограничена на множестве X. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Точной верхней (нижней) гранью функции $f(x)$ на множестве $X \subset R^n$* называется действительное число M (m) такое, что

1) $f(x) \le M$ ($f(x) \ge m$) для любого $x \in X$;
2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x' \in X$ такая, что $f(x') > M - \varepsilon$ ($f(x') < m + \varepsilon$).

ТЕОРЕМА 6 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset R^n$, то она достигает на этом множестве своих точной верхней и точной нижней граней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \sup\limits_X f(x)$. Если для любого $x \in X$ верно неравенство: $f(x) < M$, - то функция $F(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на множестве X и $F(x) > 0$ для любого $x \in X$. Значит, согласно первой теореме Вейерштрасса, существует число $A > 0$ такое, что $F(x) \le A$ при всех $x \in X$. Тогда $f(x) \le M - \frac{1}{A} < M$ для любого $x \in X$. Мы пришли к противоречию с определением точной верхней грани. Значит, наше предположение неверно, и существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$. Случай точной нижней грани рассматривается аналогично. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть множество $X \subset R^n$ таково, что любая его точка является предельной. Функция $f(x)$ *равномерно непрерывна* на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$, $\rho(x', x'') < \delta$, выполнено неравенство: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 7 (теорема Кантора). *Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset R^n$, то она равномерно непрерывна на этом множестве.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на X. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натурального числа m найдутся точки $x'_m, x''_m \in X$, для которых $\rho(x'_m, x''_m) < \frac{1}{m}$, но

$$(*) \qquad |f(x'_m) - f(x''_m)| \ge \varepsilon .$$

Последовательность $\{x'_m\}$ ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{k_m}\}$. Пусть $x'_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$. Так как множество X замкнуто, то $x_0 \in X$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, значит, $f(x'_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x_0)$. С другой стороны, так как $\rho(x'_{k_m}, x''_{k_m}) < \frac{1}{k_m}$, то последовательность $\{x''_{k_m}\}$ также сходится к точке x_0 при $m \to \infty$. Значит, $f(x''_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x_0)$.

Тогда получаем, что $\left|f(x'_{k_m})-f(x''_{k_m})\right|\xrightarrow[m\to\infty]{}0$. Это противоречит неравенству (*). Следовательно, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X. Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §3.

1) Пусть известно, что функция $(f(x)\cdot g(x))$ непрерывна в точке $a\in R^n$. Следует ли отсюда, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a? Приведите соответствующие примеры.
2) Если в первой теореме Вейерштрасса отказаться от условия замкнутости множества X, останется ли верным заключение теоремы? Приведите пример.
3) Если отказаться в теореме Кантора от условия ограниченности множества X, останется ли теорема верной? Приведите пример.

---

§4.
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В этом параграфе будут изложены основные понятия, связанные с дифференцированием функций многих переменных: понятие частных производных функции, важнейшее понятие дифференцируемости функции и условия дифференцируемости, а также понятие дифференциала функции n переменных и его основные свойства.

4.1.ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ.

Пусть, как и выше, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, $f(x)$ – некоторая функция, и точка $x_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n})$ - внутренняя для ее области определения D_f; $\Delta x = x-x_0=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)$, где $\Delta x_k = x_k - x_{0k}; k=1,2,...,n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Частной производной по переменной x_k функции $f(x)$ в точке x_0* называется предел:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_k f}{\Delta x_k}=$$

$$=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_{01},...,x_{0k}+\Delta x_k,...,x_{0n})-f(x_{01},...,x_{0k},...,x_{0n})}{\Delta x_k}.$$

Часто вместо $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$ применяют обозначение $f'_{x_k}(x_0)$.

Заметим, что частная производная – это обычная производная функции одной переменной, которая получается из функции $f(x)$, если зафиксировать и считать постоянными все её переменные, кроме x_k. А поскольку из дифференцируемости функции одной переменной следует её непрерывность (в данной точке), то отсюда сразу следует, что если существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 по переменной x_k.

ПРИМЕР 1. Для функции $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$ частные производные в точке (x,y,z) (при $x>0$, $z\neq 0$) следующие:

$$f'_x=\frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1},\ f'_y=\frac{1}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x,\ f'_z=yx^{\frac{y}{z}}(-\frac{1}{z^2})\ln x.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что *функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, если существует такая окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0, что для любого $x\in U(x_0)$ приращение $\Delta f=f(x)-f(x_0)$ имеет вид:

(1) $$\Delta f=A_1\Delta x_1+\ldots+A_n\Delta x_n+\bar{o}(\rho),\quad \rho\to 0,$$

где $A_1,\ldots,A_n$ - фиксированные числа, не зависящие от приращений переменных $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$, $\rho=\|\Delta x\|=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}$.

Заметим, что $\bar{o}(\rho)=$

$$=\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}{\rho}=\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_1}{\rho}\Delta x_1+\ldots+\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_n}{\rho}\Delta x_n.$$

Поскольку $|\frac{\Delta x_k}{\rho}|\leq 1$, а величина $\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}$ бесконечно мала при $\rho\to 0$, то обозначив $\alpha_k=\frac{\bar{o}(\rho)\cdot\Delta x_k}{\rho^2}$, $k=1,2,\ldots,n$, получаем: $\bar{o}(\rho)=\alpha_1\cdot\Delta x_1+\ldots+\alpha_n\cdot\Delta x_n$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ - бесконечно малы при $\rho\to 0$.

Это позволяет получить следующее представление приращения дифференцируемой функции:

(2) $$\begin{aligned}\Delta f&=A_1\Delta x_1+\ldots+A_n\Delta x_n+\alpha_1\Delta x_1+\\&+\ldots+\alpha_n\Delta x_n=(A,\Delta x)+(\alpha,\Delta x)\end{aligned}$$

Здесь в скалярных произведениях участвуют n – векторы $A=(A_1,...,A_n)$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\Delta x=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)$. При этом выражение $A_1\Delta x_1+...+A_n\Delta x_n=(A,\Delta x)$ есть главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции Δf.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Дифференциалом (первым дифференциалом)* функции *f(x)* в точке x_0 (соответствующим вектору Δx приращений переменных) называется главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции: $df(x_0;\Delta x)=A_1\Delta x_1+...+A_n\Delta x_n$, где константы $A_1,...,A_n$ определены из равенства (1).

Что же представляют собой эти константы $A_1,...,A_n$? Ответ на этот вопрос мы получим из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. (Необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существуют её частные производные f'_{x_k} по всем переменным $x_k, k=1,...,n$, и верны равенства: $f'_{x_k}(x_0)=A_k$, $k=1,...,n$, где A_k - постоянные из формулы (1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём вектор приращений $\Delta x=\Delta_k x=(0,...,0,\Delta x_k,0,...,0)$, то есть переместимся от точки x_0 в некоторую точку x вдоль координатной оси x_k. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в x_0, то её приращение (согласно (1)) в данном случае имеет вид: $\Delta f=$ $=\Delta_k f=A_k\Delta x_k+\bar{o}(\rho)$, $\rho=|\Delta x_k|$. Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)=$ $=\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_k f}{\Delta x_k}=A_k$, что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что теорема 1 также показывает, что константы $A_1,\dots,A_n$ в определении 2 являются однозначно определёнными.

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то при достаточно малом ρ приращение функции имеет вид:*

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\rho). \tag{3}$$

Из теоремы 1 и формулы (3) вытекает также, что для дифференцируемой функции можно определять дифференциал как главную, линейную относительно приращений переменных, часть приращения функции, задаваемую равенством:

$$df(x_0;\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\cdot\Delta x_n. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление (3) и неравенства: $|\Delta x_k| \le \rho,\quad k = 1,\dots,n,$ - получаем, что $|\Delta f| =$

$$=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\rho)\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot\Delta x_1\right| +$$

$$+\dots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\cdot\Delta x_n\right| + |\bar{o}(\rho)| \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\right|\right)\cdot\rho + |\bar{o}(\rho)|.$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta f = 0$. Это и означает непрерывность функции $f(x)$ в данной точке. Теорема доказана.

4.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ПОВЕРХНОСТИ.

Из материала первого семестра известно, что дифференцируемость функции одной переменной равносильна существованию (в соответствующей точке) касательной к графику этой функции. Оказывается, понятие дифференцируемости функции двух переменных имеет, как мы увидим ниже, аналогичный геометрический смысл.

Пусть задана некоторая поверхность $S: F(x,y,z)=0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Плоскость P называется *касательной* плоскостью к поверхности $S: F(x,y,z)=0$ в точке $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0)$, если угол между плоскостью P и всякой секущей L, проходящей через точку M_0 и любую другую точку $M' = M'(x;y;z)$ на поверхности S, стремится к нулю при $M' \to M_0$ (M' движется по поверхности S).

Заметим, что, согласно этому определению, для любой кривой $l, l \subset S$, проходящей через точку M_0, касательная к ней (если она существует) в точке M_0 обязательно лежит в плоскости P.

На Рис.1 изображена касательная плоскость (плоскость P) к поверхности S в точке $M_0 \in S$.

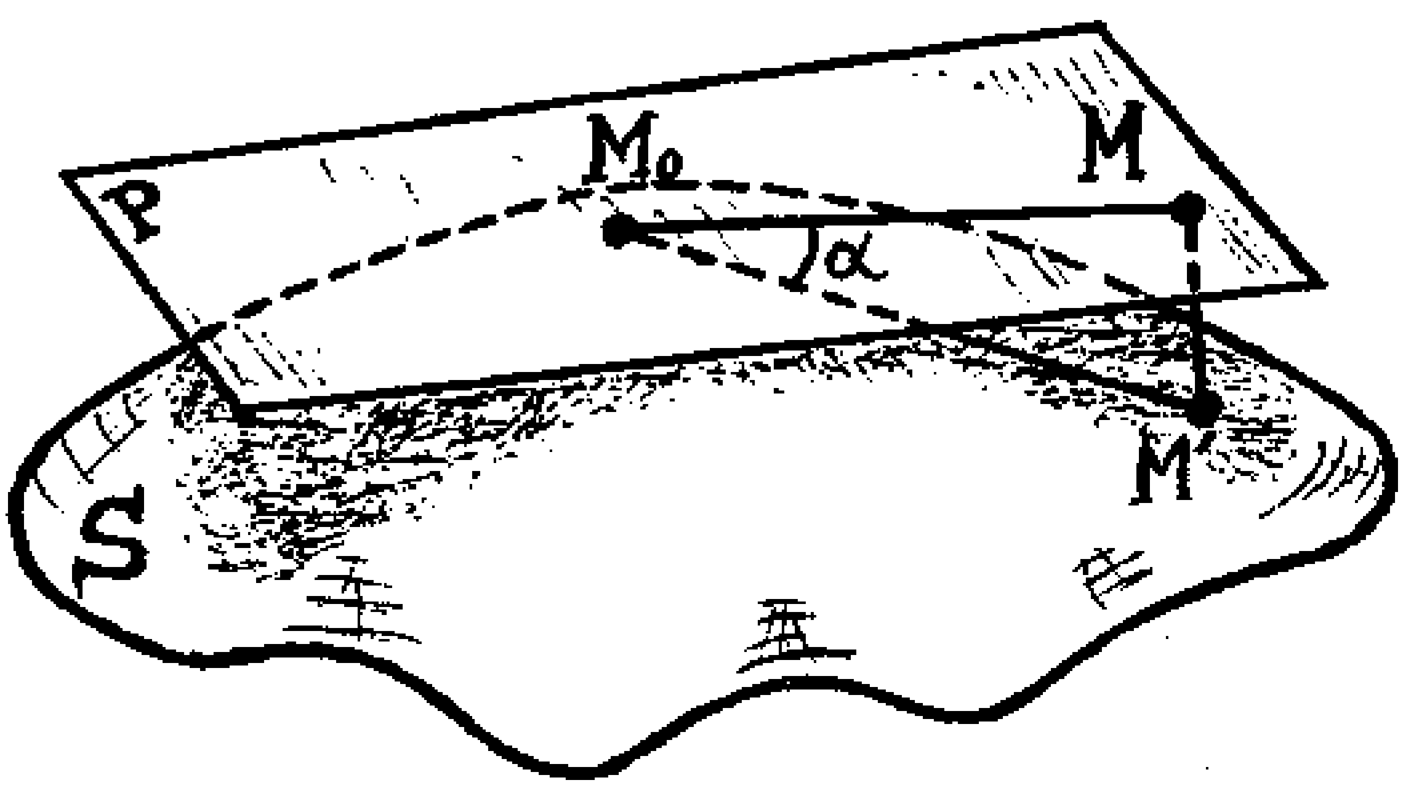

РИС.1

ЛЕММА 1. *Пусть функция* $z = f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $(x_0;y_0)$, *и* $z_0 = f(x_0;y_0)$. *Тогда у поверхности* $\Gamma: f(x,y) - z = 0$ *(представляющей собой график данной функции) в точке* $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0)$ *имеется касательная плоскость, задаваемая следующим уравнением:*

(5) $P = P^{\Gamma}_{M_0} : f'_x(x_0;y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что плоскость P, задаваемая уравнением (5), удовлетворяет определению касательной плоскости. Как известно из курса аналитической геометрии, вектор $\overline{n}_P = \{f'_x(x_0;y_0); f'_y(x_0;y_0); -1\}$ является нормальным к плоскости P в точке $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0) \in P$. Пусть $M = M(x;y;z)$ - некоторая другая точка графика Γ.

Тогда $|\cos(\overline{M_0M},{}^\wedge\, \overline{n}_P)| = \dfrac{|(\overline{M_0M}, \overline{n}_P)|}{\|\overline{M_0M}\| \cdot \|\overline{n}_P\|} =$

$$= \frac{|f'_x(x_0;y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y - y_0) - (z - z_0)|}{\|\overline{M_0M}\| \cdot \|\overline{n}_P\|}.$$

Далее, воспользуемся тем, что в силу дифференцируемости функции $z = f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$, выражение под знаком модуля в числителе последней дроби есть $\overline{o}(\rho)$. А также заметим, что $\|\overline{M_0M}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \geq \rho =$ $= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Поэтому получаем:

$$|\cos(\overline{M_0M},{}^\wedge\, \overline{n}_P)| = \frac{|\overline{o}(\rho)|}{\|\overline{M_0M}\| \cdot \|\overline{n}_P\|} \leq \frac{|\overline{o}(\rho)|}{\rho \cdot \|\overline{n}_P\|} \xrightarrow[M \to M_0]{} 0.$$

Лемма доказана.

Выясним теперь, каким условиям должна удовлетворять функция для того, чтобы она была дифференцируемой. Оказывается, что наличие частных производных у функции в данной точке не является достаточным условием для её дифференцируемости. Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}.$$

Её обе частные производные в точке (0;0) равны нулю (проверьте!), однако она не дифференцируема в этой точке, поскольку $\Delta f=f(x,y)-f(0;0)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ (Убедитесь в этом самостоятельно!). (В самом деле, это означает, что данная функция не является непрерывной в точке *(0;0)*, а следовательно, в силу Теоремы 2, она не дифференцируема в данной точке).

ТЕОРЕМА 3. (Достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки $x_0=(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n})$, и все они непрерывны в самой точке x_0, то $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём рассуждения для случая $n=2$. В общем случае доказательство проводится совершенно аналогично. Итак, пусть задана функция $f(x,y)$, удовлетворяющая условиям теоремы в точке $(x_0;y_0)$. Рассмотрим её приращение $\Delta f=f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)=$
$[f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x;y_0)]+[f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)]$.
Применяя теорему Лагранжа к разностям в квадратных скобках, получаем:

$$\Delta f = f'_y(x_0+\Delta x; y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y + f'_x(x_0+\theta_2\Delta x; y_0)\Delta x.$$

Далее, в силу непрерывности частных производных в точке $(x_0;y_0)$, имеем следующие равенства:

$$f'_y(x_0+\Delta x; y_0+\theta_1\Delta y) = f'_y(x_0;y_0)+\alpha,$$

$$f'_x(x_0+\theta_2\Delta x; y_0) = f_x'(x_0;y_0)+\beta,$$

где α,β стремятся к нулю при $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$. Поэтому

$$\Delta f = [f'_y(x_0;y_0)+\alpha]\Delta y + [f'_x(x_0;y_0)+\beta]\Delta x =$$

$$f'_y(x_0;y_0)\Delta y + f'_x(x_0;y_0)\Delta x + \alpha\Delta y + \beta\Delta x.$$

Поскольку $\dfrac{|\alpha\Delta y+\beta\Delta x|}{\rho} \le \dfrac{|\alpha\Delta y|+|\beta\Delta x|}{\rho} \le |\alpha|+|\beta| \to 0$ при $\rho\to 0$, то есть $\alpha\Delta y+\beta\Delta x = \bar{o}(\rho)$, то окончательно получаем: $$\Delta f = f'_y(x_0;y_0)\Delta y + f'_x(x_0;y_0)\Delta x + \bar{o}(\rho).$$

Это означает дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы рассмотрели необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции. Сделаем ещё одно простое замечание по поводу представления дифференциала. Поскольку для независимых переменных $x_k, k=1,\dots,n$, верны равенства: $\Delta x_k = dx_k$, то дифференциал функции $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ от n независимых переменных в точке x можно представлять в виде:

(6) $$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\cdot dx_n.$$

4.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ.

Пусть $F(t)=f(\varphi(t))$ сложная функция, где $f(x)= = f(x_1,\dots,x_n)$, и $x_i(t)=\varphi_i(t_1,\dots,t_k), i=1,\dots,n.$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функции* $\varphi_i(t)=\varphi_i(t_1,...,t_k)$, $i=1,...,n$, *- дифференцируемы в точке* $t_0=(t_{01},...,t_{0k})$, *и функция* $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ *дифференцируема в точке* $x_0=(x_{01},...,x_{0n})$, *где* $x_{0i}=\varphi_i(t_0)$, $i=1,...,n$. *Тогда сложная функция* $F(t)=f(\varphi(t))$ *дифференцируема в точке* $t_0=(t_{01},...,t_{0k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим приращение:

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(t)-F(t_0)=f(x(t))-f(x(t_0))= \\ &= f'_{x_1}\cdot\Delta x_1+...+f'_{x_n}\cdot\Delta x_n+\bar{o}(\|\Delta x\|)\end{aligned} \tag{7}$$

В силу дифференцируемости функций $x_i=\varphi_i(t)=$ $=\varphi_i(t_1,...,t_k)$, $i=1,...,n$, приращения Δx_i имеют вид:

$$\begin{aligned}&\Delta x_i=\varphi_i(t)-\varphi_i(t_0)= \\ &(\varphi_i)'_{t_1}\cdot\Delta t_1+...+(\varphi_i)'_{t_k}\cdot\Delta t_k+\bar{o}_i(\|\Delta t\|),\ i=1,...,n\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя выражения (8) в (7), получаем:

$$\begin{aligned}&\Delta F=\Big(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_1}\Big)\cdot\Delta t_1+... \\ &...+\Big(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_k}\Big)\cdot\Delta t_k+\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot\bar{o}_i(\|\Delta t\|)+\bar{o}(\|\Delta x\|).\end{aligned} \tag{9}$$

Далее, поскольку в (7) $\bar{o}(\|\Delta x\|)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i$ (см. формулу (2)), то с учётом (8), имеем:

$$\begin{aligned}&\bar{o}(\|\Delta x\|)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i=\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot(\varphi_i)'_{t_1}\Big)\Delta t_1+... \\ &...+\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot(\varphi_i)'_{t_k}\Big)\Delta t_k+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\bar{o}_i(\|\Delta t\|)=\bar{o}(\|\Delta t\|)\end{aligned} \tag{10}$$

Последнее равенство в (10) следует из того, что $|\Delta t_j|\le\|\Delta t\|$, $j=1,...,k$, и кроме того, $\alpha_i\to 0$ при $\|\Delta t\|\to 0$.

(Действительно, из условия $\|\Delta t\| \to 0$ в силу дифференцируемости, а значит, и непрерывности, функции $x_i = \varphi_i(t)$ следует, что $\|\Delta x\| \to 0$, а следовательно, и $\alpha_i \to 0$.)

Итак, из (9) и (10), учитывая также, что $\Delta t_j = dt_j$, $j = 1,\dots,k$, получаем:

$$\Delta F = \left(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_1}\right) \cdot dt_1 + \dots \tag{11}$$
$$\dots + \left(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_k}\right) \cdot dt_k + \overline{o}(\|\Delta t\|),$$

что и означает дифференцируемость данной сложной функции $F(t) = f(\varphi(t))$ в точке $t_0 = (t_{01},\dots,t_{0k})$. (Напомним здесь ещё раз, что все частные производные вычислены в заданных точках t_0, x_0 соответственно). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРЕМЕ 4.

1) Из формулы (11) видно, что дифференциал функции $F(t)$ имеет вид:

$$dF = \left(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_1}\right) \cdot \Delta t_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_k}\right) \cdot \Delta t_k, \tag{12}$$

а её частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_j},\ j = 1,\dots,k.$$

2) В частности, если t скаляр, то $\dfrac{dF}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot (x_i)'_t$.

4.4. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ЗАПИСИ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА.

Из теоремы 4 вытекает также следующий важный факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Первый дифференциал функции многих переменных имеет инвариантную форму записи:*

(13) $$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n.$$

независимо от того, является ли эта функция простой (то есть $x_1,\ldots,x_n$ - независимые переменные) или сложной (то есть $x_i(t)=\varphi_i(t_1,\ldots,t_k)$, $i=1,\ldots,n$.) При этом смысл выражений dx_i различен. В первом случае, когда x_i - независимые переменные, $dx_i=\Delta x_i$ - фиксированные приращения переменных; во втором случае $dx_i=d\varphi_i(t)$ – это дифференциалы функций $x_i(t)=\varphi_i(t_1,\ldots,t_k)$, $i=1,\ldots,n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перегруппировав слагаемые в формуле (12), получим: $dF=df=f'_{x_1}\cdot[\sum\limits_{j=1}^{k}(x_1)'_{t_j})\cdot\Delta t_j]+\ldots$

$\ldots+f'_{x_n}\cdot[\sum\limits_{j=1}^{k}(x_n)'_{t_j})\cdot\Delta t_j]+\overline{o}(\|\Delta t\|)$, где выражения в квадратных скобках представляют собой дифференциалы функций $x_i(t)=\varphi_i(t_1,\ldots,t_k)$, $i=1,\ldots,n$. Отсюда сразу следует равенство (13). Утверждение доказано.

Инвариантная форма первого дифференциала позволяет установить следующие правила его вычисления:

1) $d(c\cdot f)=c\cdot df,\ c\in R$;
2) $d(f\pm g)=df\pm dg$;
3) $d(f\cdot g)=d(f)\cdot g+f\cdot d(g)$;
4) $d(\frac{f}{g})=\frac{d(f)\cdot g-f\cdot d(g)}{g^2}$, $g\neq 0$.

(Проверьте эти равенства самостоятельно!)

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §4.

1. *Является ли функция $f(x)$ дифференцируемой в данной точке x_0, если известно, что $f(x) = \overline{o}(\|x\|)$ при $x \to x_0$?*
2. *Каков геометрический смысл дифференциала функции одной переменной?*
3. *Каков геометрический смысл слагаемого $\overline{o}(\rho)$ в выражении для приращения дифференцируемой функции в случае функции одной или двух переменных?*

§5. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые обобщения понятия частных производных функции нескольких переменных. К ним относятся, с одной стороны, понятие производной функции по заданному направлению, а с другой стороны, понятие о частных производных высших порядков. Кроме того, будет рассмотрено понятие кратной дифференцируемости функции.

5.1. ГРАДИЕНТ И ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ.

Пусть $x_0 = (x_{01},\dots,x_{0n})$ - фиксированная точка, внутренняя для области определения функции $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$, и пусть задан вектор $e, e \in R^n, \|e\| = 1$. В этом случае координаты вектора e равны его направляющим косинусам: $e = (\cos\alpha_1,\dots,\cos\alpha_n)$, где α_i - угол между осью OX_i и вектором e, $i = 1,\dots,n$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}(t) = f(x_0 + te) = f(x_{01} + t\cos\alpha_1,\dots,x_{0n} + t\cos\alpha_n)$, где $t \in R$ - вещественный параметр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Производной функции* $f(x)$ *по направлению* $e = (\cos\alpha_1,\dots,\cos\alpha_n)$ в точке x_0 называется производная сложной функции $\tilde{f}(t)$ в точке $t_0 = 0$, то есть число

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(0)}{t} = \tilde{f}'(0). \tag{1}$$

Если функция $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$ дифференцируема в точке $x_0 = (x_{01},\dots,x_{0n})$, то производная (1) легко вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции. Получаем формулу:

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial e}(x_0)=f'_{x_1}(x_0)\cdot\cos\alpha_1+\ldots+f'_{x_n}(x_0)\cdot\cos\alpha_n.$$

Из формулы (2) видно, что производная по направлению есть скалярное произведение вектора e и вектора частных производных функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор $grad\,f(x_0)=(f'_{x_1}(x_0),\ldots,$ $\ldots,f'_{x_n}(x_0))$ называется *градиентом* функции $f(x)$ в точке x_0.

Таким образом, из (2) получается равенство:

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial e}(x_0)=(grad\,f(x_0),e).$$

Градиент часто представляют в виде: $grad\,f=\nabla f$ (читается: «набла f»), где $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ - так называемый *абстрактный вектор-оператор градиента.*

Отметим, кстати, что формулу (13) из §4 можно записать и в следующем виде: $df=(gradf,\Delta x)=(\nabla f,\Delta x)$.

Что характеризует градиент функции? Какими свойствами обладает? Выясним это подробнее.

ЛЕММА 1. *Градиент функции (в данной точке) – это вектор, направление которого есть направление наибольшей скорости роста функции, а норма градиента равна этой наибольшей скорости роста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)=(grad\,f(x_0),e)=\|grad\,f\|\cdot\|e\|\cdot\cos(grad\,f,^\wedge e).$$

Поскольку $\cos(grad\,f,^\wedge e)\le 1$, и достигает своего наибольшего значения 1, когда векторы сонаправлены, то легко видеть, что максимальное значение производной $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ будет в том и только в том случае, когда $e = \frac{grad\, f(x_0)}{\|grad\, f(x_0)\|}$, то есть когда вектор e совпадает с ортом градиента f (в точке x_0).

Какова же максимальная скорость роста функции f? Из формулы (3), при $e = \frac{grad\, f(x_0)}{\|grad\, f(x_0)\|}$, получаем, что: $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = (grad\, f(x_0), \frac{grad\, f}{\|grad\, f\|}) = \|grad\, f\|$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку, в силу Леммы 1, направление и норма градиента есть направление и величина максимальной скорости роста функции (в данной точке), то *градиент $grad\, f(x)$ не зависит от выбора системы координат.*

Рассмотрим теперь направление градиента функции по отношению к её *поверхности уровня*, то есть к геометрическому месту точек, определяемому уравнением вида: $P_c : f(x) = f(x_1,...,x_n) = c$, где c - некоторая константа.

ЛЕММА 2. *Градиент дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ ортогонален её поверхности уровня P_c, проходящей через точку x_0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в малой окрестности точки x_0 взята произвольная точка x, $x \in P_c, x - x_0 = \Delta x \neq 0$. В силу дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0, имеем:

$$0 = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (grad\, f(x_0), \Delta x) + \bar{o}(\|\Delta x\|).$$

Разделив это равенство на $\|\Delta x\|$, получим:

$$0=\frac{\Delta f}{\|\Delta x\|}=f'_{x_1}(x_0)\frac{\Delta x_1}{\|\Delta x\|}+\ldots+f'_{x_n}(x_0)\frac{\Delta x_n}{\|\Delta x\|}+ \tag{4}$$
$$+\frac{\bar{o}(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}=(grad\, f(x_0),\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|})+\frac{\bar{o}(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}$$

При переходе к пределу в (4) при $\|\Delta x\|\to 0$ вектор $\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}$ превращается в касательный вектор $e_{\text{кас.}}$ в точке x_0 к поверхности P_c, поэтому получается, что $(grad\, f(x_0), e_{\text{кас.}})=0$. Таким образом, $grad\, f(x_0)\perp e_{\text{кас.}}$. В силу произвольности точки $x\in P_c$ отсюда следует, что $grad\, f(x_0)\perp P_c$. Это завершает доказательство леммы.

5.2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Если у функции $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ определена в некоторой области $G\subset R^n$, то она также является функцией n переменных. Может случиться, что эта функция имеет частную производную по переменной x_i в некоторой внутренней точке $x_0=(x_{01},\ldots,x_{0n})$ области G. Тогда эту производную $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_k})(x_0)=$ $=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_0)$ называют *второй частной производной функции f сначала по переменной x_k, а затем по переменной x_i, в точке $x_0=(x_{01},\ldots,x_{0n})$* (то есть сначала производится дифференцирование по x_k, а затем по x_i). Если $x_k\neq x_i$, то частная производная второго порядка называется *смешан-*

ной. Далее, применяя такое же рассуждение ко второй частной производной, можно определить понятие третьей частной производной, и так далее. Основываясь на этом описании понятия второй частной производной, мы можем ввести следующее общее индуктивное определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если функция $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_{n-1}}\dots\partial x_{i_1}}(x)$ $(n-1)$-го порядка в некоторой области $G\subset R^n$, у которой также существует частная производная по переменной x_{i_n} в точке $x_0=(x_{01},\dots,x_{0n})\in G$, то эта производная: $\dfrac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\dfrac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_{n-1}}\dots\partial x_{i_1}}\right)(x_0)$ - называется *частной производной n-го порядка функции $f(x)$ по переменным* $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ в точке x_0 и обозначается $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}}\dots\partial x_{i_1}}(x_0)$.

Аналогично частным производным первого порядка, существуют другие обозначения и для частных производных высших порядков. Производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(x_0)$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}}\dots\partial x_{i_1}}(x_0)$ можно обозначать и так: $f''_{x_k x_i}$, $f^{(n)}_{x_{i_1}\dots x_{i_n}}$ - соответственно. Если среди переменных $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ не все совпадают, то такая частная производная n- го порядка называется *смешанной*.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x,y)=arctg\,xy;\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2};\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2};$$

Для её частных производных верно равенство (проверьте его самостоятельно!):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+x^2y^2}\right)=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

ПРИМЕР 2. Пусть теперь задана функция

$$g(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}.$$

Вычислим её частные производные первого порядка:

$$f'_x(x;y)=\begin{cases} y\dfrac{4x^2y^2+x^4-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases};$$

$$f'_y(x;y)=\begin{cases} x\dfrac{-4x^2y^2+x^4-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}.$$

В этом случае оказывается, что смешанные частные производные второго порядка в точке (0;0) не совпадают, а именно:

$$f''_{xy}(0;0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0;y)-f'_x(0;0)}{y}=-1;$$

$$f''_{yx}(0;0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x;0)-f'_y(0;0)}{x}=1.$$

(Проверьте самостоятельно все вычисления!).

Рассмотрим теперь понятие n раз дифференцируемой функции, которое также вводится индуктивно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ называется *дважды дифференцируемой в точке* $x_0=(x_{01},...,x_{0n})$, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, и все её частные производные дифференцируемы в точке x_0. Аналогично, если функция $f(x)$ $(n-1)$ раз $(n>1)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, и все её частные производные $(n-1)$-го порядка дифференцируемы в точке x_0, то $f(x)$ называется *n раз дифференцируемой в точке* x_0.

Из теоремы 3 параграфа 4 и только что приведённого определения 4 вытекает следующее достаточное условие для того, чтобы функция была n раз дифференцируема в данной точке.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *была* n *раз дифференцируема в данной точке* $x_0=(x_{01},\dots,x_{0n})$, *достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки* x_0 *она была* $n-1$ *раз дифференцируема, чтобы у неё существовали все частные производные* n*-го порядка, и чтобы все они были непрерывны в самой точке* x_0.

Рассмотрим теперь вопрос о том, зависят ли смешанные частные производные функции $f(x)$ по одному и тому же набору переменных от того, в каком порядке производится последовательное дифференцирование, и при каких условиях они совпадают. В приведённых выше примерах, как мы видели, в одном случае (Пример 1) смешанные производные второго порядка совпадают, а в другом (Пример 2) они различны. Сформулируем и докажем 2 теоремы о достаточных условиях равенства смешанных частных производных второго порядка функции двух переменных.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция* $f(x,y)$ *дважды дифференцируема в точке* (x_0,y_0), *то* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие теоремы означает, что частные производные функции $f(x,y)$ определены в некоторой окрестности $U=U(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0), и дифференцируемы в самой этой точке. Пусть приращение h достаточно мало, так что точка (x_0+h,y_0+h) принадлежит окрестности U. Рассмотрим выражение $\Phi=\Phi(x_0,y_0,h)=$ $=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0)$, которое можно представить следующими двумя способами. Во-первых, так:

$$
\begin{aligned}
\Phi&=[f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)]-\\
&-[f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)]=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\varphi(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0)$. И во-вторых, так:

$$
\begin{aligned}
\Phi&=[f(x_0+h;y_0+h)-f(x_0,y_0+h)]-\\
&[f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)]=\psi(y_0+h)-\psi(y_0),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\psi(y)=f(x_0,+h,y)-f(x_0,y)$.

Применяя теорему Лагранжа к дифференцируемой функции $\varphi(x)$ на интервале $(x_0;x_0+h)$, из (5) получаем:

$$
\begin{aligned}
\Phi&=\varphi'_x(x_0+\theta h)\cdot h=[f'_x(x_0+\theta h,y_0+h)-\\
&-f'_x(x_0+\theta h,y_0)]\cdot h=[f'_x(x_0+\theta h,y_0+h)-f'_x(x_0,y_0)]\cdot h-\\
&-[f'_x(x_0+\theta h,y_0)-f'_x(x_0,y_0)]\cdot h,\ \text{где } \theta\in(0;1).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Далее, в последнем выражении в квадратных скобках стоят приращения дифференцируемой в точке (x_0,y_0) функции f'_x, которые можно представить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
[f'_x(x_0+\theta h,y_0+h)-f'_x(x_0,y_0)]&=f''_{xx}(x_0,y_0)\theta h+\\
&+f''_{xy}(x_0,y_0)h+\alpha_1\theta h+\alpha_2 h;
\end{aligned}
$$

$$
[f'_x(x_0+\theta h,y_0)-f'_x(x_0,y_0)]=f''_{xx}(x_0,y_0)\theta h+\alpha_3\theta h,
$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - бесконечно малые при $h\to 0$. Подставляя полученные выражения в (7), получаем:

$$\Phi = f''_{xx}(x_0,y_0)\theta h^2 + f''_{xy}(x_0,y_0)h^2 + (\alpha_1\theta h + \alpha_2 h)h -$$
$$- f''_{xx}(x_0,y_0)\theta h^2 - \alpha_3\theta h^2 .$$

Таким образом,

(8) $$\Phi = f''_{xy}(x_0,y_0)h^2 + (\alpha_1\theta + \alpha_2 - \alpha_3\theta)h^2 .$$

Совершенно аналогично, используя представление (6), получаем:

$$\Phi = \psi'_y(y_0 + \tilde{\theta}h)\cdot h = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \tilde{\theta}h) -$$
$$- f'_y(x_0, y_0 + \tilde{\theta}h)]\cdot h =$$

(9) $$[f'_y(x_0 + h, y_0 + \tilde{\theta}h) - f'_y(x_0,y_0)]\cdot h -$$
$$-[f'_y(x_0, y_0 + \tilde{\theta}h) - f'_y(x_0,y_0)]\cdot h = f''_{yx}(x_0,y_0)h^2 +$$
$$f''_{yy}(x_0,y_0)\tilde{\theta}h^2 + (\beta_1 h + \beta_2\tilde{\theta}h)h - f''_{yy}(x_0,y_0)\tilde{\theta}h^2 - \beta_3\tilde{\theta}h^2 ,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - бесконечно малые при $h \to 0$. Поэтому из (9) получаем:

(10) $$\Phi = f''_{yx}(x_0,y_0)h^2 + (\beta_1 + \beta_2\tilde{\theta} - \beta_3\tilde{\theta})h^2 .$$

Поделив на h^2 и приравнивая (8) и (10), получим:

$$f''_{xy}(x_0,y_0) + (\alpha_1\theta + \alpha_2 - \alpha_3\theta) = f''_{yx}(x_0,y_0) + (\beta_1 + \beta_2\tilde{\theta} - \beta_3\tilde{\theta}),$$

откуда и следует искомое равенство: $f''_{yx}(x_0,y_0) = f''_{xy}(x_0,y_0)$, так как разность $f''_{yx}(x_0,y_0) - f''_{xy}(x_0,y_0)$ есть бесконечно малая при $h \to 0$ и значит, равна нулю. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если у функции $f(x,y)$ в некоторой окрестности $U = U(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0) существуют частные производные $f'_x, f'_y, f''_{yx}, f''_{xy}$, причём производные f''_{yx}, f''_{xy} непрерывны в точке (x_0,y_0), то имеет место равенство: $f''_{yx}(x_0,y_0) = f''_{xy}(x_0,y_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем выражение Φ и некоторые выкладки из доказательства теоремы 1. Из равенства (7) и условия теоремы о существовании частной производной f''_{xy}, применяя теорему Лагранжа, получаем:

(11) $$\Phi = [f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)]\cdot h =$$
$$f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 h)\cdot h^2, \text{ где } \theta_1 \in (0;1).$$

С другой стороны, используя выкладку (9) и условие теоремы о существовании производной f''_{yx} и применяя теорему Лагранжа, имеем:

(12) $$\Phi = [f'_y(x_0+h, y_0+\tilde{\theta}h) - f'_y(x_0, y_0+\tilde{\theta}h)]\cdot h =$$
$$= f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\tilde{\theta}h)\cdot h^2, \text{ где } \theta_2 \in (0;1).$$

Поделив на h^2 и приравнивая правые части выражений (11) и (12), приходим к равенству:

(13) $$f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\tilde{\theta}h) = f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 h).$$

При переходе к пределу в (13) при $h\to 0$, в силу условия непрерывности этих производных в точке (x_0, y_0), получаем искомое равенство: $f''_{yx}(x_0,y_0) = f''_{xy}(x_0,y_0)$. Теорема полностью доказана.

Из теоремы 1 выведем достаточное условие равенства смешанных производных высших порядков.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $f(x)$ m раз $(m>2)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда её частные производные m-го порядка не зависят от порядка последовательного выполнения операций дифференцирования.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что производная $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\ldots\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\ldots\partial x_{i_1}}(x_0)$ не зависит от перестановки двух соседних операций дифференцирования, то есть доказать равенство:

$$(14)\qquad \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\ldots\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\ldots\partial x_{i_1}}(x_0)=\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}\ldots\partial x_{i_1}}(x_0).$$

С этой целью рассмотрим функцию

$F(x)=\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}}\ldots\partial x_{i_1}}(x),\ 1<k<m$. Из условия теоремы следует, что:

1) при $1<k<m-1$ функция $F(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0;
2) при $k=m-1$ функция $F(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0.

Но тогда, по теореме 1, её смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}}$ при $1<k<m-1$ тождественно совпадают в некоторой окрестности точки x_0, а при $k=m-1$ они совпадают в точке x_0. Это означает, что:

1) $\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\ldots\partial x_{i_1}}=\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}\ldots\partial x_{i_1}}$ при $1<k<m-1$ в некоторой окрестности точки x_0, откуда при дальнейшем дифференцировании по остальным переменным $x_{i_{k+2}},\ldots,x_{i_m}$ получается равенство (14);
2) равенство: $\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\ldots\partial x_{i_1}}=\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}\ldots\partial x_{i_1}}$ в точке x_0 при $k=m-1$ совпадает с искомым равенством (14).

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает следующее обстоятельство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если функция $f(x)$ m раз $(m \geq 2)$ дифференцируема в точке x_0, то её частные производные m- го порядка можно записывать в следующей форме:* $\frac{\partial^m f}{(\partial x_n)^{\alpha_n} \ldots (\partial x_1)^{\alpha_1}}$, *где* $0 \leq \alpha_j \leq m$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §5.

1) *В каком направлении данная функция быстрее всего убывает?*
2) *Как вычислить нормаль к графику дифференцируемой функции* $z = f(x, y)$.
3) *Если функция дифференцируема в данной точке 10 раз, то на каком множестве совпадают её смешанные частные производные а) 7-го порядка; б) 9-го порядка; в) 10-го порядка ?*

§6.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Как указано в заголовке, в этом параграфе будет изложено понятие кратных дифференциалов функции n переменных и выведена важная для приложений формула Тейлора, представляющая приращение функции (при малой норме вектора приращений её аргументов) в виде суммы некоторого многочлена и бесконечно малой функции (при норме вектора приращений аргументов, стремящейся к нулю).

6.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Ранее, в параграфе 4, мы рассматривали инвариантную форму записи (первого) дифференциала функции $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ (формула (13)). При этом сам оператор дифференцирования имеет, очевидно, вид:

$$d=(\nabla,dx)=\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n.$$

Предположим, что после применения к функции $f(x)$ оператора дифференцирования d получается снова дифференцируемая функция $df(x)$ (в данной точке или на данном множестве). Для этого достаточно предположить, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема (в точке или на множестве), а переменные $x_1,...,x_n$ либо независимы, либо тоже представляют собой дважды дифференцируемые функции (в соответствующей точке или на соответствующем множестве). Тогда к функции $df(x)$ можно снова применить оператор дифференцирования, который (в аналогичной инвариантной форме записи) можно обозначить для удобства другой буквой, например, так:

$$\delta=(\nabla,\delta x)=\frac{\partial}{\partial x_1}\delta x_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}\delta x_n.$$

Композиция этих двух операторов имеет вид:

(1) $$\delta(df)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)\cdot\delta x_k.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Вторым дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 называется величина $d^2f(x_0)=$ $=\delta(df)(x_0)$ - значение композиции (1), взятое при равенстве: $\delta x=\{\delta x_1,\ldots\delta x_n\}=\{dx_1,\ldots,dx_n\}=dx$, где все частные производные вычислены в точке x_0, то есть выражение:

$$d^2f=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)\cdot dx_k.$$

По индукции, если определён и дифференцируем дифференциал $d^{n-1}f(x)$, то *n-ым дифференциалом (дифференциалом n-го порядка)* функции $f(x)$ в точке x_0 называется величина $d^nf(x_0)=\delta(d^{n-1}f)(x_0)$ - значение композиции $\delta(d^{n-1}f)$, взятое при равенстве:

$$\delta x=\{\delta x_1,\ldots\delta x_n\}=\{dx_1,\ldots,dx_n\}=dx,$$

где все частные производные вычислены в точке x_0.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть переменные $x_1,\ldots,x_n$ независимы или являются линейными функциями. (*Под линейной функцией n независимых переменных понимают функцию вида* $x_i(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}t_j$, где $a_{ij}\in R$). Тогда все их дифференциалы, кроме первого, равны нулю, поскольку равны нулю все частные производные второго и более высоких порядков. В этих случаях форма записи для дифференциалов высших порядков существенно упрощается. Более конкретно, отметим что:

1) $d^2 f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x_0)dx_i dx_j$ - квадратичная форма от переменных $dx_1,...,dx_n$. Эта квадратичная форма симметрична, если участвующие в ней частные производные не зависят от порядка последовательного дифференцирования.

2) В указанных случаях для дифференциалов высших порядков верно равенство:

(2) $$d^m f=(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^m f=(\nabla,dx)^m f,\ m\ge 1.$$

3) Для вычисления дифференциалов высших порядков в указанных случаях удобно пользоваться следующей *формулой полинома Ньютона* (которую мы здесь не доказываем):

(3) $$(a_1+...+a_n)^m = \sum_{\substack{\gamma_1+...+\gamma_n \\ 0\le\gamma_i\le m}} \frac{m!}{(\gamma_1)!\cdot...\cdot(\gamma_n)!}(a_1)^{\gamma_1}\cdot...\cdot(a_n)^{\gamma_n},\ m\ge 1$$

6.2.ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Для функций многих переменных, аналогично случаю одной переменной, имеет место формула Тейлора. В этом разделе мы будем рассматривать функции n независимых переменных.

ТЕОРЕМА 1. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция* $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ $(m+1)$ *раз дифференцируема в некоторой окрестности* $U=U(x_0)$ *точки* $x_0=(x_{01},...,x_{0n})$. *Тогда для всякого* $x,\ x\in U(x_0)$, *приращение функции* $\Delta f=f(x)-f(x_0)$ *представимо в виде:*

(4) $\Delta f = f(x) - f(x_0) = df(x_0) + \dfrac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \dfrac{d^m f(x_0)}{m!} + R_m,$

где остаточный член имеет следующий вид (называемый остаточным членом в форме Лагранжа):

(5) $$R_m = \frac{d^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x)}{(m+1)!},\ \theta \in (0;1),\ \Delta x = x - x_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сложную функцию $F(t) = f(x_0 + t\Delta x) = f(x_{01} + t\Delta x_1, \ldots, x_{0n} + t\Delta x_n)$. Эта функция одной переменной, в силу условий теоремы, удовлетворяет всем требованиям для представления её по формуле Тейлора-Маклорена, рассмотренной в первом семестре, при $t_0 = 0, t = 1, \Delta t = 1$. Таким образом, можно записать:

(6) $$F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Заметим, что поскольку внутренние функции $x_k(t) = x_{0k} + t\Delta x_k$ являются линейными, то производные сложной функции $F(t)$ в точке $t_0 = 0$ легко вычисляются и имеют вид:

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \Delta x_i = df(x_0),$$

(7) $$F''(0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(x_0),$$

$$F^{(m)}(0) = d^m f(x_0),$$

$$F^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x).$$

(Предлагаем проверить равенства (7) самостоятельно!) Подставляя эти равенства в (6), получаем и искомую формулу (4), и формулу для остаточного члена (5), что и требовалось. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Пусть выполнены все условия теоремы 1, и пусть, сверх того, все частные производные* $(m+1)$ *- го порядка функции* $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ *непрерывны в некоторой шаровой окрестности точки* $x_0=x_{01},\dots,x_{0n}$. *Тогда остаточный член* R_m *в формуле (4) может быть представлен в виде:*

$$R_m=\frac{1}{m!}\int_0^1(1-t)^m d^{m+1}f(x_0+t\Delta x)dt= \tag{8}$$

$$=\frac{1}{m!}\int_0^1(1-t)^m[(\nabla,\Delta x)^{m+1}f](x_0+t\Delta x)dt\,.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что в формуле (6) остаточный член можно представить в интегральной форме:

$$R_m=\frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}=\frac{1}{m!}\int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt\,. \tag{9}$$

С этой целью применим к очевидному равенству: $F(1)=F(0)+\int_0^1 F'(t)dt$ - формулу интегрирования по частям. Поскольку $dt=d(-(1-t))$. Получим: $\Delta F=F(1)-F(0)=$

$$=\int_0^1 F'(t)dt=F'(t)[-(1-t)]\Big|_0^1+\int_0^1 F''(t)(1-t)dt=F'(0)+$$

$+\int_0^1 F''(t)(1-t)dt$. К последнему интегралу $\int_0^1 F''(t)(1-t)dt$ снова применим формулу интегрирования по частям, имея в виду равенство: $(1-t)dt = d(-\frac{1}{2}(1-t)^2)$. Тогда получим:

$$\Delta F = F'(0) + F''(t)[-\frac{1}{2}(1-t)^2]\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 F'''(t)(1-t)^2 dt =$$

$$= F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 F'''(t)(1-t)^2 dt.$$

И так далее, применяя снова и снова формулу интегрирования по частям к получающемуся интегралу, в итоге придём к формуле:

$$\Delta F = F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \ldots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \tag{10}$$

$$+\frac{1}{m!}\int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt,$$

где остаточный член выражается как раз формулой (9).

Теперь, воспользовавшись равенствами (7), получаем из формулы (10) искомую формулу (4) с остаточным членом в виде (8). Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях только что доказанного следствия из формулы (8) легко получается формула остаточного члена в форме Лагранжа. В самом деле, достаточно применить к правой части формулы (8) первую теорему о среднем значении для определённого интеграла (учитывая, что функция $(1-t)^m$ не меняет знака на интервале $(0;1)$):

$$R_m = \frac{1}{m!}\int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt = \frac{1}{m!}F^{(m+1)}(\theta)\int_0^1 (1-t)^m dt =$$

$$=\frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}\left[-(1-t)^{m+1}\right]\Big|_0^1=\frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Теперь рассмотрим разложение функции по формуле Тейлора при более слабых условиях, и ещё одну форму остаточного члена - форму Пеано.

ТЕОРЕМА 2. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть m - целое число, $m\geq 1$. Пусть функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ $m-1$ раз дифференцируема в некоторой шаровой окрестности $U=U(x_0)$ точки $x_0=(x_{01},...,x_{0n})$, и m раз дифференцируема в самой точке $x_0=(x_{01},...,x_{0n})$. Тогда для любой точки x, $x\in U=U(x_0)$, верна формула:*

$$\Delta f=f(x)-f(x_0)=df(x_0)+\frac{d^2f(x_0)}{2!}+...+\frac{d^mf(x_0)}{m!}+R_m,$$

где остаточный член имеет вид (называемый остаточным членом в форме Пеано):

$$(11)\qquad R_m=\bar{o}(\rho^m),\ \rho\to 0,\quad \rho=\|\Delta x\|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Прежде, чем доказывать теорему 2, заметим, что формула Тейлора в более подробной записи имеет следующий вид: $f(x)=$

$$(12)\qquad =f(x_0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left[\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(x)\big|_{x=x_0}+R_m$$

где $x=(x_1,...,x_n)$, $x_0=(x_{01},...,x_{0n})$, $\Delta x_k=x_k-x_{0k}$, $k=1,2,...,n$.

В правой части этого равенства стоит сумма многочлена степени m от n переменных $\Delta x_1,...,\Delta x_n$ и остаточного члена R_m. Выразим остаточный член R_m из равенства (12) и. рассмотрим (обозначим) его как функцию: $R_m=g_m(x)$, - задаваемую следующим равенством:

(13) $$g_m(x) = f(x) - f(x_0) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left[(x_1 - x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_{0n})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(x)\big|_{x=x_0}.$$

Для доказательства теоремы 2 теперь достаточно установить, что при выполнении условий этой теоремы имеет место равенство: $g_m(x) = \overline{o}(\rho^m)$.

Сначала сформулируем и докажем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ m раз дифференцируема в точке $x_0 = x_{01}, \ldots, x_{0n}$, то как сама функция $g_m(x)$, определённая равенством (13), так и все ее частные производные по любым переменным $x_1, \ldots, x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x_0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. При $m=1$ функция $g_m(x)$ принимает вид:

$$g_1(x) = f(x) - f(x_0) - (x_1 - x_{01})\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) - \ldots - (x_n - x_{0n})\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0),$$

и равенства: $g_1(x_0) = 0$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial x_i}(x_0) = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ - проверяются элементарно.

Для проведения индукции предположим, что лемма справедлива для некоторого номера $m \geq 1$, и докажем, что в таком случает она справедлива и для номера $m+1$.

Пусть функция $f(x)$ $m+1$ раз дифференцируема в точке $x_0 = x_{01}, \ldots, x_{0n}$, и рассмотрим функцию:

$$g_{m+1}(x) = f(x) - f(x_0) -$$

(14) $$-\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k!}\left[(x_1 - x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_{on})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(x)\big|_{x=x_0}.$$

Легко видеть, что $g_{m+1}(x_0)=0$ (достаточно учесть, что каждая круглая скобка (x_i-x_{0i}) в выражении (14) выше обращается в нуль в точке x_0).

Осталось доказать, что для любого i, $i=1,2,\dots,n$, функция $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_i}(x_0)$ и все её частные производные до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x_0, а для этого, по предположению индукции, достаточно показать, что функция $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_i}(x)$ определяется равенством типа (13), а точнее, следующим равенством:

$$\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=x_0}-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left[(x_1-x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+(x_n-x_{0n})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=x_0} \tag{15}$$

Так как все переменные x_i $(i=1,2,\dots,n)$ равноправны и входят в выражение для $g_{m+1}(x)$ симметрично, то достаточно доказать равенство (15) для $i=1$, то есть следующее равенство:

$$\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_1}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\Big|_{x=x_0}-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left[(x_1-x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+(x_n-x_{0n})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\Big|_{x=x_0} \tag{16}$$

Из (14) очевидно, что для доказательства (16) достаточно убедиться, что для каждого номера $k=1,2,\dots,m+1$ при фиксированных $x_2,x_3,\dots,x_n$, верно следующее равенство:

$$(17)\quad \frac{d}{dx_1}\left[(x_1-x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_n-x_{0n})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(x)\Big|_{x=x_0}=$$
$$=k\left[(x_1-x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_n-x_{0n})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\Big|_{x=x_0}.$$

Так как при дифференцировании по x_1 переменные $x_2,x_3,\ldots,x_n$ фиксированы, то величину:

$$\widetilde{D}=(x_2-x_{02})\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+(x_n-x_{0n})\frac{\partial}{\partial x_n}$$

при дифференцировании по x_1 можно рассматривать как постоянную. Кроме этого, заметим, что поскольку символы $\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ используются для получения значений частных производных функции f в фиксированной точке x_0, то при дифференцировании по x_1 указанные символы нужно рассматривать как постоянные величины.

В силу сказанного, для доказательства равенства (17) достаточно доказать, что

$$(18)\quad \frac{d}{dx_1}\left[(x_1-x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1}+\widetilde{D}\right]^k=k\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1-x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1}+\widetilde{D}\right]^{k-1}.$$

Дифференцируя функцию $\left[(x_1-x_{01})\frac{\partial}{\partial x_1}+\widetilde{D}\right]^k$ по x_1, как сложную, и учитывая отмеченную выше независимость от x_1 символов $\widetilde{D}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}$, мы получаем равенство (18). Индукция закончена. Лемма 1 доказана

ЛЕММА 2. *Пусть* $g(x)=g(x_1,\ldots,x_n)$ *– произвольная функция, удовлетворяющая двум требованиям:*

1) g(x) m раз дифференцируема в точке $x_0=x_{01},\ldots,x_{0n}$*;*

2) *сама функция $g(x)$ и все ее частные производные по любым переменным $x_1,...,x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в указанной точке x_0.*

Тогда для функции $g(x)$ при $x \to x_0$ справедлива оценка: $g(x) = \overline{o}(\rho_*^m)$, где $\rho = \|x - x_0\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. При $m=1$ утверждение леммы вытекает из условия дифференцируемости функции $g(x)$ в точке x_0, которое обеспечивает равенство: $g(x)\text{-}g(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0i}) + \overline{o}(\rho)$. В самом деле, так как $g(x_0) = 0$, и $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = 0$ для всех $i = 1,...,n$, то получается, что $g(x) = \overline{o}(\rho)$. Для проведения индукции предположим, что лемма 2 справедлива для некоторого номера $m \geq 1$, и докажем, что в таком случает она справедлива и для номера $m+1$.

Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет двум требованиям леммы 2 для номера $m+1$. Тогда очевидно, что любая частная производная этой функции первого порядка - $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$, $i = 1,...,n$, будет удовлетворять двум требованиям леммы 2 для номера *m*, а поэтому, по предположению индукции, будет справедлива оценка:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \overline{o}(\rho^m). \tag{19}$$

Заметим теперь, что поскольку $m \geq 1$, то $m+1 \geq 2$, и функция $g(x)$, удовлетворяющая двум требованиям леммы для номера $m+1$, во всяком случае, хотя бы один раз дифференцируема в окрестности точки x_0. Поэтому для $g(x)$ выполнены условия Теоремы 1 для номера $m = 0$. По указанной теореме, для любой точки x из достаточно малой окрестности точки x_0 найдется число θ, $\theta \in (0;1)$ такое, что справедлива формула:

$$g(x) = g(x_0) + dg(x_0 + \theta(x - x_0)) = \tag{20}$$
$$= g(x_0) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Заметим, что поскольку точка $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ лежит между точками x_0 и x, то $\|\xi - x_0\| < \rho = \|x - x_0\|$, и поэтому, в силу равенства (19), имеем: $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\xi) = \overline{o}(\|\xi - x_0\|^m) \le \overline{o}(\rho^m)$.

Подставляя последнюю оценку в правую часть (20) и учитывая, что $g(x_0) = 0$, получаем: $g(x) = \overline{o}(\rho^m)\sum_{i=1}^{n}|x_i - x_{0i}|$.

А так как $|x_i - x_{0i}| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})^2} = \rho$, то окончательно имеем: $g(x) = \overline{o}(\rho^{m+1})$. Индукция завершена. Лемма 2 доказана.

Обратимся теперь к доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Утверждение теоремы легко следует из доказанных лемм 1 и 2. Как уже отмечалось выше, для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при выполнении условий теоремы для функции $g_m(x)$, определённой равенством (13) (а это и есть остаточный член формулы Тейлора для функции $f(x)$), справедлива оценка: $g_m(x) = \overline{o}(\rho^m)$.

В силу леммы 1, сама функция $g_m(x)$ и все ее частные производные по любым переменным $x_1,...,x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x_0. Но тогда в силу леммы 2, справедлива искомая оценка: $g_m(x)=\overline{o}(\rho^m)$. Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §6.

1) *Можно ли в формулировке теоремы 2 убрать условие, что функция $f(x)$ дифференцируема m-1 раз в некоторой шаровой окрестности точки x_0, и оставить только условие её m-кратной дифференцируемости в самой точке x_0?*
2) *Напишите подробную формулу для второго дифференциала сложной функции двух переменных: $z=f(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$ (здесь $x=x(t)$, $y=y(t)$ не предполагаются линейными функциями).*
3) *Напишите формулу Тейлора-Маклорена для функции $\sin x\cdot\cos y$ до порядка m=3 с остаточным членом: а) в форме Лагранжа; б) в форме Пеано.*

§7. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В этом параграфе мы рассмотрим понятие локального экстремума для функции n $(n > 1)$ переменных, условия его существования и правила отыскания.

7.1. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка $x_0 = (x_{01},...,x_{0n})$, внутренняя для области определения функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$, называется *точкой* её *локального экстремума*, если для любой точки x из некоторой её окрестности $U = U(x_0)$ разность $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ отлична от нуля и сохраняет знак. В частности, если $\Delta f > 0$, то это точка *локального минимума*, а если $\Delta f < 0$, то это точка *локального максимума.*

На Рис.2 ниже изображён график функции $z=f(x,y)$ над областью D. Точка A – точка локального максимума, а точка B – точка локального минимума этой функции, $f(A) = z_1$, . $f(B) = z_2$.

ТЕОРЕМА 1. (Необходимое условие существования локального экстремума). *Если у функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *существуют все частные производные* f'_{x_k}, *и эта точка является точкой локального экстремума, то все частные производные в ней равны нулю, то есть* $f'_{x_k}(x_0) = 0$,. $k = 1,...,n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем у функции $f(x)$ все переменные, кроме x_k $(1 \le k \le n)$, и рассмотрим функцию $\varphi(x_k) = f(x_{01},...,x_{0k-1},x_k,x_{0k+1},...,x_{0n})$ - функцию одной переменной. Очевидно, что для функции $\varphi(x_k)$ точка x_{0k} является также точкой локального экстремума. Как известно из материала первого семестра, производная функции одной переменной в точке локального экстремума равна нулю. Поэтому $\varphi'(x_{0k}) = f'_{x_k}(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

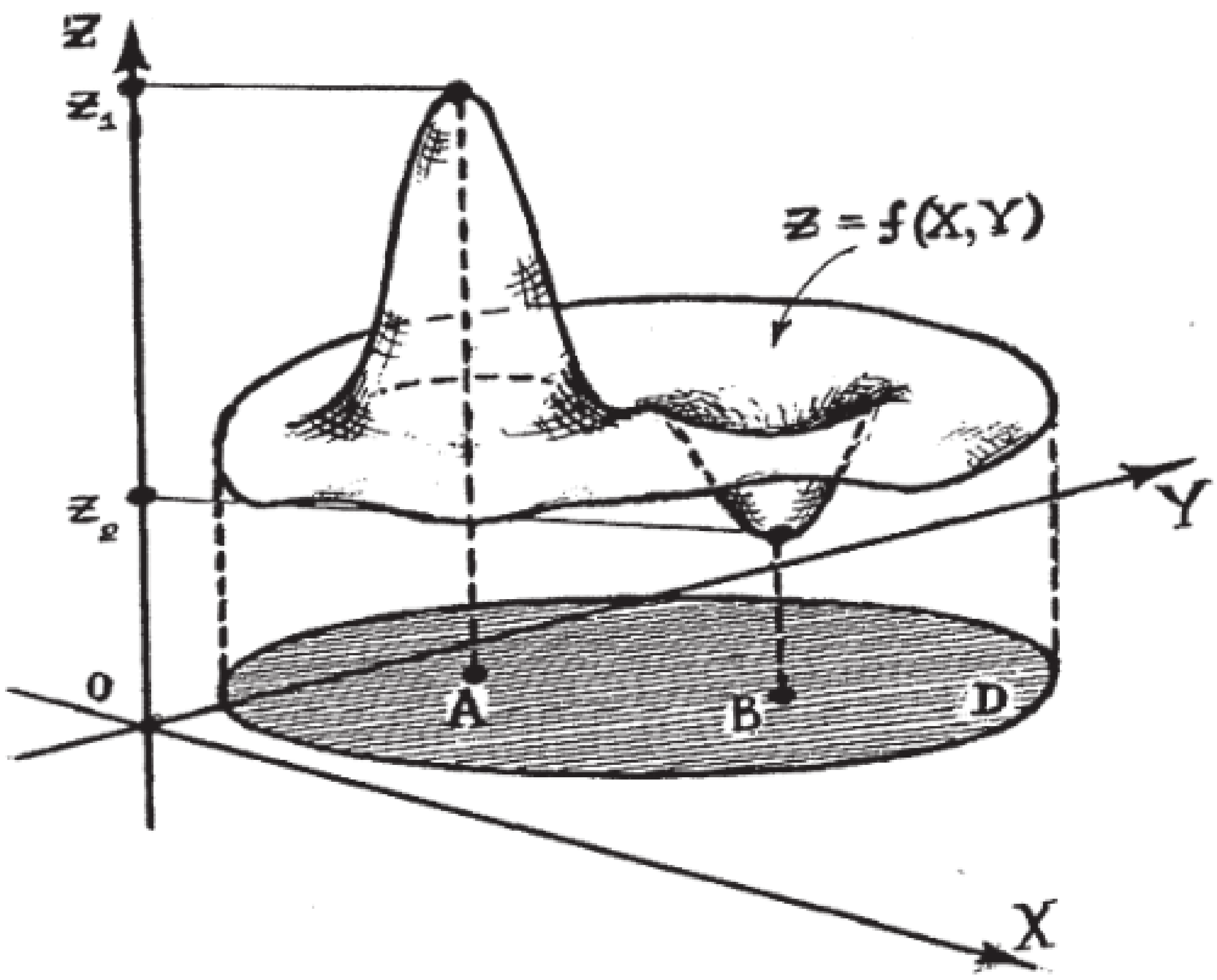

РИС.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точка $x_0 = (x_{01},...,x_{0n})$ называется *стационарной* для функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$, если она внутренняя для её области определения, и все частные производные в ней определены и равны нулю: $f'_{x_k}(x_0) = 0 \quad (k = 1,...,n)$.

Однако одно только условие равенства нулю всех частных производных не является достаточным условием для существования в данной точке локального экстремума.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $f(x,y)=xy$. Её частные производные в точке $(0,0)$, очевидно, равны нулю. Но разность $\Delta f = f(x,y)-f(0,0)=xy-0$ больше нуля при одинаковых знаках x и y, и меньше нуля, если у них разные знаки. Таким образом, локального экстремума в точке $(0,0)$ у этой функции нет.

Ниже, при формулировке и доказательстве достаточных условий для существования локального экстремума, мы будем пользоваться некоторыми понятиями и фактами, известными из курса линейной алгебры.

ТЕОРЕМА 2. (Достаточные условия локального экстремума). *Пусть функция $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ n независимых переменных 1 раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 = x_{01},\dots,x_{0n}$, и дважды дифференцируема в самой точке x_0. Пусть x_0 - стационарная точка, то есть $df(x_0)=0$. Тогда, если второй дифференциал $d^2f(x_0)$ представляет собой знакоопределённую квадратичную форму, то x_0 - точка локального экстремума. При этом, если форма $d^2f(x_0)$ положительно определена, то x_0 - точка локального минимума, если $d^2f(x_0)$ отрицательно определена, то x_0 - точка локального максимума. Если же квадратичная форма $d^2f(x_0)$ - знакопеременна, то локального экстремума в точке x_0 нет.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим разность Δf по формуле Тейлора при $n=2$ с остаточным членом в форме Пеано: $\Delta f = f(x)-f(x_0) = df(x_0)+\dfrac{d^2 f(x_0)}{2!}+\overline{o}(\|\Delta x\|^2) =$

$$= \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x_0)\Delta x_i \Delta x_j + \overline{o}(\|\Delta x\|)^2$$

Обозначим $h_i = \dfrac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|}$, $f''_{x_i x_j}(x_0) = a_{ij}$, $\alpha = \alpha(\|x\|) = \dfrac{\overline{o}(\|\Delta x\|^2)}{\|\Delta x\|^2}$ - бесконечно малая при $\|\Delta x\| \to 0$. Тогда Δf представляется в виде: $\Delta f = \dfrac{1}{2}\|\Delta x\|^2\left(\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}\cdot h_i h_j + \alpha\right)$. Заметим, что вектор $h=\{h_1,\dots,h_n\}$ имеет норму $\|h\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2} = 1$, то есть это элемент единичной сферы S^{n-1} пространства R^n.

Рассмотрим случай, когда $d^2 f(x_0)$ - положительно определённая квадратичная форма. В этом случае квадратичная форма $\Phi(h) = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij} h_i h_j$ - также положительно определённая непрерывная функция на единичной сфере S^{n-1}, являющейся замкнутым ограниченным множеством в R^n. Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса, функция $\Phi(h)$ достигает на S^{n-1} своего инфимума, то есть существует такая точка $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in S^{n-1}$, в которой $\Phi(\xi) = \inf\limits_{h\in S^{n-1}}\{\Phi(h)\} = \mu$. Поскольку всюду на сфере $\Phi(h) > 0$, то $\Phi(h) \ge \Phi(\xi) = \mu > 0$. Воспользовавшись этим, получаем: $\Delta f = \dfrac{1}{2}\|\Delta x\|^2(\Phi(h)+\alpha) \ge \dfrac{1}{2}\|\Delta x\|^2(\mu+\alpha)$. Так как $\alpha \to 0$ при $\|\Delta x\| \to 0$, то найдётся такое $\delta = \delta(\mu) > 0$, что при $\|\Delta x\| < \delta$ будет $|\alpha| < \frac{\mu}{2}$. При этихусловиях $\Delta f \geq \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2(\mu + \alpha) > \; > \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2(\mu - \frac{\mu}{2}) = \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 \frac{\mu}{2} > 0$. Итак, для любого x такого, что $\|\Delta x\| < \delta$, всегда будет $\Delta f > 0$. Следовательно, точка x_0 - точка локального минимума.

В случае отрицательно определённой квадратичной формы $d^2 f(x_0)$ совершенно аналогично доказывается, что точка x_0 - точка локального максимума.

Пусть теперь $d^2 f(x_0)$ - знакопеременная квадратичная форма. Тогда, пользуясь предыдущими обозначениями, имеем: $\Delta f = \frac{1}{2}\rho^2(\Phi(h) + \alpha)$, где $\rho = \|\Delta x\|$, а $\Phi(h)$ - знакопеременная квадратичная форма на единичной сфере S^{n-1}. Следовательно, существуют такие точки $h', h'' \in S^{n-1}$, что $\Phi(h') < 0$, $\Phi(h'') > 0$. При этом заметим, что α зависит от ρ, и $\alpha = \alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, а $\Phi(h)$ от ρ не зависит. Поэтому, взяв ρ_0 достаточно малым, можно добиться, чтобы $|\alpha| = |\alpha(\rho_0)| < \min\{\frac{|\Phi(h')|}{2}, \frac{|\Phi(h'')|}{2}\}$. При этих условиях будет одновременно: $\Phi(h') + \alpha(\rho_0) < 0$, $\Phi(h'') + \alpha(\rho_0) > 0$. Тогда для точек $x' = x_0 + \rho_0 h'$, $x'' = x_0 + \rho_0 h''$ будем иметь:

$$(\Delta f)_1 = f(x') - f(x_0) = \frac{1}{2}(\rho_0)^2(\Phi(h') + \alpha(\rho_0)) < 0,$$

$$\text{и } (\Delta f)_2 = f(x'') - f(x_0) = \frac{1}{2}(\rho_0)^2(\Phi(h'') + \alpha(\rho_0)) > 0.$$

Итак, приращение функции меняет знак, следовательно, точка x_0 не является в этом случае точкой экстремума функции $f(x)$. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случаях квази-знакоопределённости (или, другими словами, полуопределённости) квадратичной формы второго дифференциала $d^2 f(x_0)$ ответ о существовании локального экстремума в точке x_0 неясен. (Напомним, что квадратичная форма $A(h)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_i h_j$ называется *квази-знакоопределённой* (или *полуопределённой*), если $A(h)\geq 0$ при любом $h=(h_1,...,h_n)$ (или $A(h)\leq 0$ при любом h), и кроме того, существует такой элемент $h_0\neq 0$, что $A(h_0)=0$.)

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функции $f(x,y)=x^3+y^3$, $g(x,y)=x^4+y^4$. В точке (0;0) вторые дифференциалы обеих функций равны нулю (проверьте!). Однако несложно убедиться (сделайте это самостоятельно!), что у функции $g(x,y)$ имеется экстремум (какой?) в точке (0;0), а у функции $f(x,y)$ в этой точке экстремума нет.

7.2.СЛУЧАЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Рассмотрим более подробно достаточные условия существования локального экстремума для случая функции двух переменных.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция* $f(x_1,x_2)$ *дифференцируема в некоторой окрестности* $U=U(x_0)$ *точки* $x_0=(x_{01},x_{02})$ *и дважды дифференцируема в самой точке* x_0. *Пусть точка* x_0 *является стационарной, а второй дифференциал функции f(x) в точке* x_0 *имеет вид:* $d^2 f(x_0)=a_{11}(dx_1)^2+2a_{12}dx_1dx_2+a_{22}(dx_2)^2$, *где* $a_{ij}=f''_{x_ix_j}(x_0)$, $1\leq i,j\leq 2$. *Тогда, если определитель* $A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}>0$, *то* *точка x_0 является точкой локального экстремума (локального максимума, если $a_{11} > 0$, и локального минимума, если $a_{11} < 0$). Если же $A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} < 0$, то экстремума в точке x_0 нет.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из курса линейной алгебры известен *критерий Сильвестра* знакоопределённости квадратичной формы, заключающийся в следующем: если все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны, то квадратичная форма положительно определена. Если же знаки главных миноров чередуются, начиная с минуса, то квадратичная форма отрицательно определена. В силу этого критерия, при условии $A_2 > 0$ и $a_{11} \neq 0$ второй дифференциал $d^2 f(x_0; dx)$ является знакоопределённой (положительной или отрицательной, в зависимости от знака a_{11}) квадратичной формой. Следовательно, по теореме 2, в этом случае в точке x_0 имеется локальный экстремум.

Пусть теперь $A_2 < 0$. Покажем, что тогда экстремума нет.

Предположим сначала, что $a_{11} \neq 0$. Обозначим, как и в теореме 2, $h_i = \dfrac{dx_i}{\rho}$, $i = 1,2$, где $\rho = \|dx\| = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$.

Тогда $d^2 f(x_0; dx) = a_{11}(dx_1)^2 + 2a_{12}dx_1 dx_2 + a_{22}(dx_2)^2 =$

$$= \rho^2[a_{11}(h_1)^2 + 2a_{12}h_1 h_2 + a_{22}(h_2)^2] =$$

$$= \frac{\rho^2}{a_{11}}[a_{11}^2(h_1)^2 + 2a_{12}a_{11}h_1 h_2 + a_{12}^2(h_2)^2 + (a_{22}a_{11} - a_{12}^2)(h_2)^2] =$$

$= \dfrac{\rho^2}{a_{11}}[(a_{11}h_1 + a_{12}h_2)^2 + A_2(h_2)^2]$. Следовательно, взяв $h_1 = 1$, и $h_2 = 0$, получим для второго дифференциала:

$d^2f(x_0;dx)=\dfrac{\rho^2}{a_{11}}\cdot(a_{11})^2=\rho^2 a_{11}$, то есть он имеет такой же знак, как a_{11}. А с другой стороны, если взять $h_1=-\dfrac{a_{12}}{\sqrt{(a_{11})^2+(a_{12})^2}}$, $h_2=\dfrac{a_{11}}{\sqrt{(a_{11})^2+(a_{12})^2}}$, то второй дифференциал приобретает следующий вид: $d^2f(x_0;dx)=\dfrac{\rho^2}{a_{11}}\cdot A_2\dfrac{(a_{11})^2}{(a_{11})^2+(a_{12})^2}=\dfrac{\rho^2 a_{11}A_2}{(a_{11})^2+(a_{12})^2}$ - и имеет, следовательно, знак, противоположный знаку a_{11}. Таким образом, второй дифференциал является в этом случае знакопеременной квадратичной формой, и поэтому, в силу теоремы 2, экстремума в точке x_0 нет.

Пусть теперь $A_2<0$, и $a_{11}=0$. Заметим, что в этом случае обязательно $a_{12}\neq 0$. Тогда получаем: $d^2f(x_0;dx)=$ $=\rho^2 h_2(2a_{12}h_1+a_{22}h_2)$. Зафиксируем $h_1^0\neq 0$ и возьмём $|h_2^0|$ настолько малым, чтобы выражение в круглых скобках имело такой же знак, как произведение $a_{12}h_1^0$ (Поскольку $(h_1^0)^2+(h_2^0)^2=1$, то для этого достаточно взять $\left|h_2^0\right|<\dfrac{|a_{12}|}{\sqrt{(a_{12})^2+(a_{22})^2}}$ - проверьте это самостоятельно!). Тогда $d^2f(x_0;\{\rho h_1^0,\rho h_2^0\})$ и $d^2f(x_0;\{\rho h_1^0,\rho(-h_2^0)\})$ будут иметь разные знаки, то есть при изменении знака h_2^0 знак d^2f также меняется. Итак, второй дифференциал в данном случае есть знакопеременная квадратичная форма, и по теореме 2, экстремума в точке x_0 нет. Теорема 3 полностью доказана.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §7.

1) *Пользуясь предложенными в данном параграфе методами, найдите точки локальных экстремумов и значения функции в них, если*

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0,\ y > 0).$$

2) *Найдите точки локальных экстремумов следующей функции трёх переменных:*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

3) *Определите множества точек локальных экстремумов функций:*

а) $f(x) = |x| + |y|$; *б)* $g(x,y) = |x| - |y|$.

§8.
НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ.

Этот параграф посвящён обсуждению понятия неявной функции, условий её существования, непрерывности, дифференцируемости, а также правил вычисления её частных производных первого и второго порядков.

Довольно часто при решении задач зависимость переменной u от n переменных $(x_1,...,x_n)$ бывает задана в виде уравнения следующего вида:

(1) $$F(u,x_1,...,x_n)=0,$$

где F - некоторая функция $(n+1)$ переменной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u=u(x_1,...,x_n)$ называется *неявной функцией, определяемой функциональным уравнением* (1) *в области* G, если при подстановке её в уравнение (1) оно обращается в области G в тождество: $F(u(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n)\equiv 0$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение:

(*) $$F(u,x_1,x_2)=u^2+x_1^2+x_2^2-1=0.$$

Легко видеть, что две непрерывные функции, задаваемые формулой: $u_{1,2}=\pm\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$, являются неявными функциями, определяемыми уравнением (*) в замкнутом круге D^1 радиуса 1 с центром в начале координат. Однако, кроме них, есть бесконечное множество других неявных функций, не являющихся непрерывными, которые можно задавать так:

$$u_G(x_1,x_2)=\begin{cases}+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}, & (x_1,x_2)\in G,\\ -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}, & (x_1,x_2)\notin D\setminus G,\end{cases}$$

где G – произвольное собственное подмножество круга D^1.

На Рис.3 ниже показано, что часть сферы, задаваемой уравнением (*), лежащая в малой окрестности точки A, однозначно проектируется на плоскость XOY. Это означает, что уравнение (*) однозначно разрешимо в этой окрестности относительно u, и следовательно определяет единственным образом явную функцию $u=u(x,y)$. И напротив, часть сферы, лежащая в малой окрестности точки B, неоднозначно проектируется на плоскость XOY. Это означает, что уравнение (*) в этой окрестности не является однозначно разрешимым относительно u. Отметим, что в точке A производная $\dfrac{\partial F}{\partial u} \neq 0$, а в точке B наоборот, $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$. Ниже мы выясним, что это как раз имеет принципиальное значение для однозначной разрешимости уравнения (*) относительно переменной u.

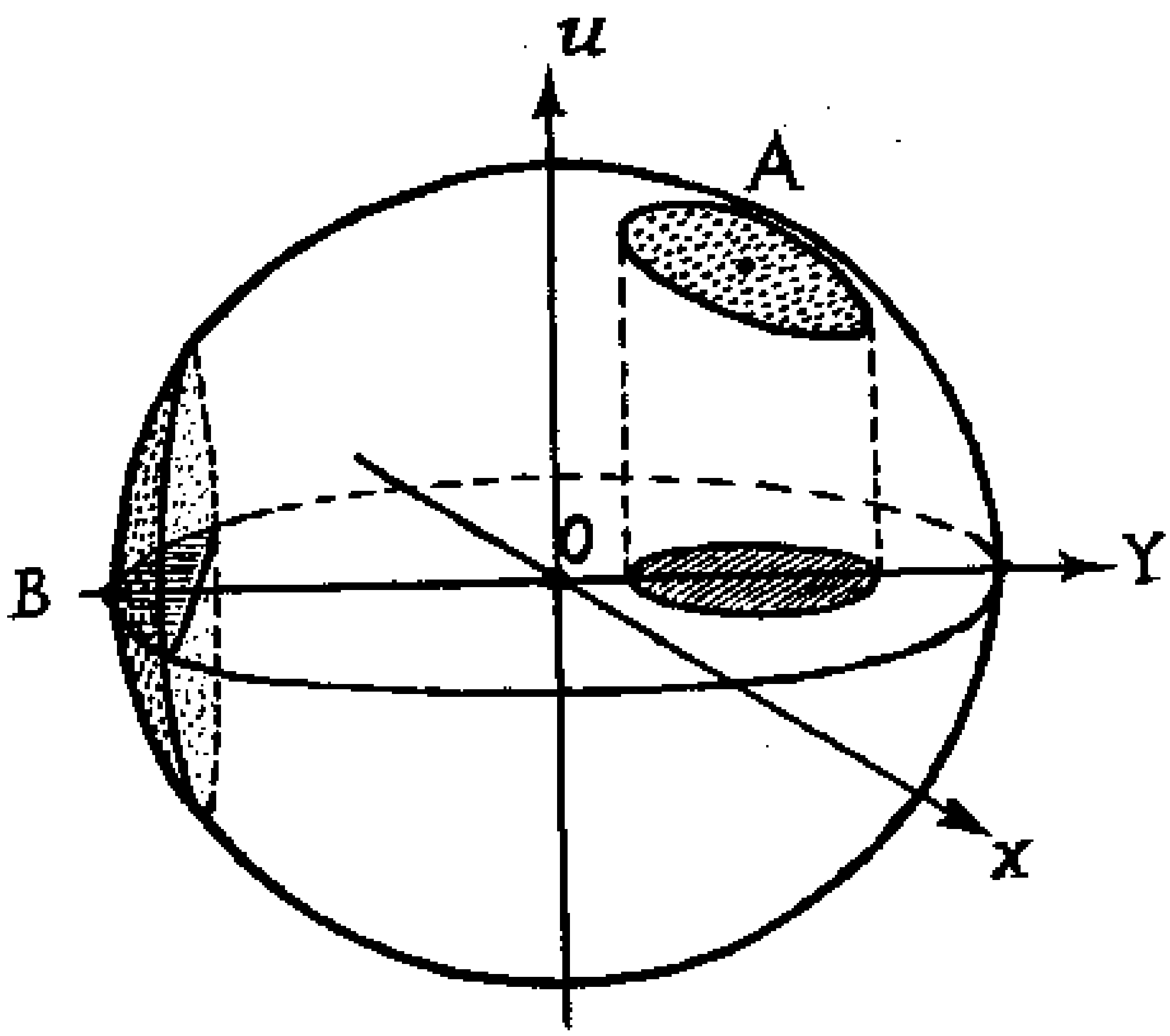

РИС.3

8.1. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ.

Рассмотрим вопрос, при каких условиях в окрестности данной точки гарантировано существование единственной непрерывной и дифференцируемой неявной функции, определяемой данным функциональным уравнением типа (1).

ТЕОРЕМА 1. (О существовании и дифференцируемости неявной функции). *Пусть функция* $F(u,x)=$ $=F(u,x_1,...,x_n)$ *дифференцируема в некоторой окрестности* $V=V(u_0,x_0)$ *точки* (u_0,x_0). *Пусть, кроме того,* $F(u_0,x_0)=0, \frac{\partial F}{\partial u}(u_0,x_0)\neq 0$, *и* $\frac{\partial F}{\partial u}$ *непрерывна в точке* (u_0,x_0). *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдётся такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *что в* δ*-окрестности* $W_\delta(x_0)$ *точки* x_0 *(то есть для любого* x *такого, что* $\|x-x_0\|<\delta$*) определена единственным образом такая функция* $\varphi(x)=\varphi(x_1,...,x_n)$, *для которой* $F(\varphi(x),x)=0$, *и* $\|\varphi(x)-u_0\|<\varepsilon$ *для любого* $x\in W_\delta(x_0)$. *При этом функция* $\varphi(x)$ *дифференцируема в* $W_\delta(x_0)$, *и её частные производные вычисляются по формулам:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-\frac{F'_{x_i}}{F'_u},\ i=1,...,n. \tag{2}$$

На Рис. 4 дана иллюстрация к проводимому ниже доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём рассуждения для случая $n=2$. Общий случай рассматривается аналогично. Сначала докажем существование требуемой функции и её единственность. Предположим для определённости, что $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0,x_{01},x_{02})>0$. В силу непрерывности $\frac{\partial F}{\partial u}$ в точке

(u_0, x_{01}, x_{02}), существует окрестность $U = U(u_0, x_{01}, x_{02})$, в которой $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ также является положительной (кроме того, можно считать, что $U \subseteq V$, то есть всюду в U функция $F(u, x_1, x_2)$ дифференцируема). Следовательно, функция $F(u, x_{01}, x_{02})$, как функция одной переменной u, монотонно возрастает на пересечении окрестности U с прямой L, задаваемой уравнениями $L: \begin{cases} x_1 = x_{01} \\ x_2 = x_{02} \end{cases}$ (см.Рис.4).

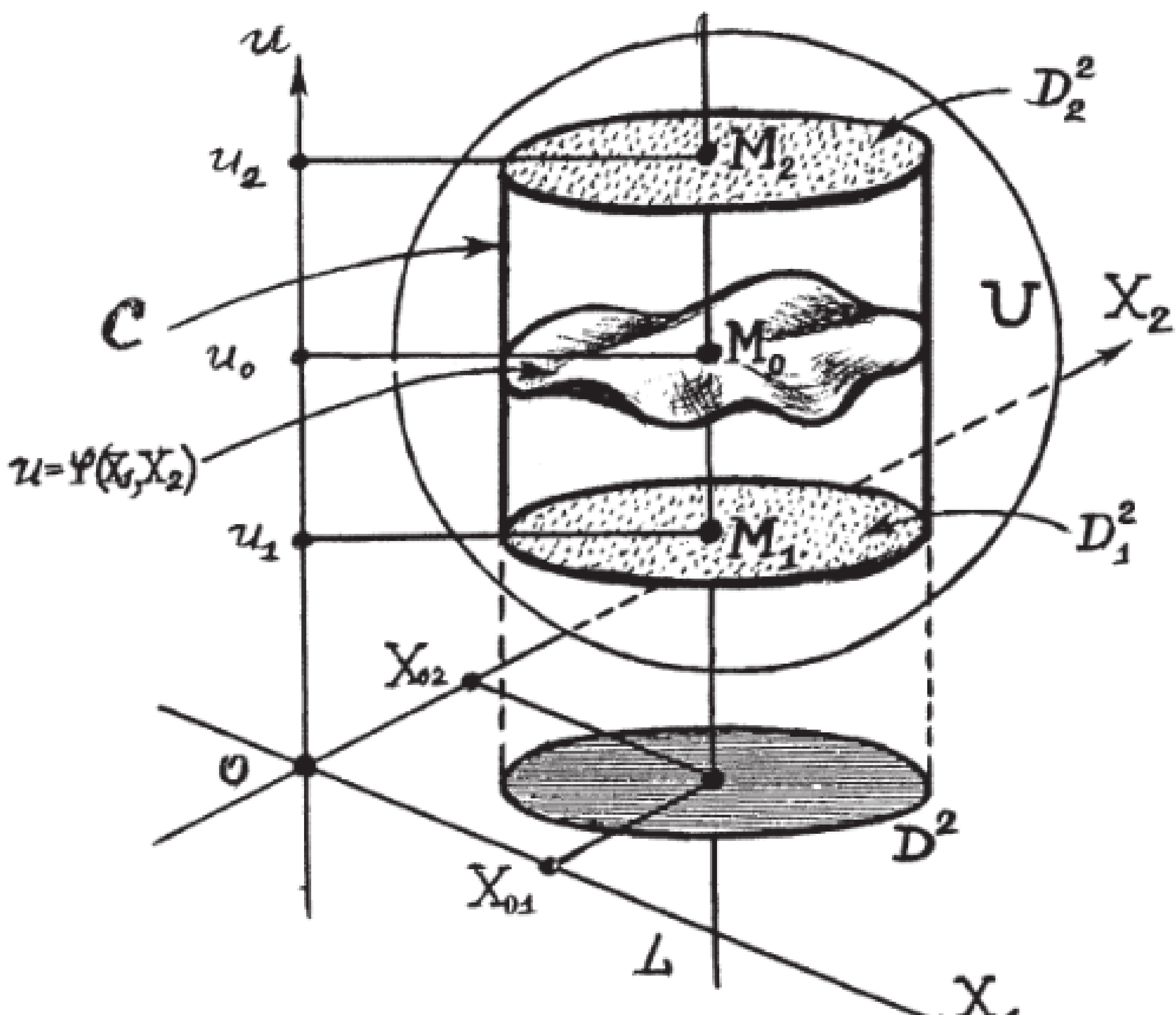

РИС.4

Следовательно, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать точки $M_1(u_1, x_{01}, x_{02})$, $M_2(u_2, x_{01}, x_{02}) \in U \cap L$ такие, что $F(M_1) < 0$, а $F(M_2) > 0$, причём $u_0 - \varepsilon < u_1 < u_0 <$

$< u_2 < u_0 + \varepsilon$. Далее, в плоскостях $P_1 : u = u_1$, $P_2 : u = u_2$ можно выбрать шаровые окрестности D_i^2 точек M_i $(i = 1,2)$ такие, что $F(M) < 0$ при $M = M(u, x_1, x_2) \in D_1^2$, и $F(M) > 0$ при $M \in D_2^2$. Можно считать, что эти окрестности одного и того же радиуса $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Таким образом, мы получили цилиндр $C : \begin{cases} u_1 < u < u_2 \\ (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 < \delta \end{cases}$, - удовлетворяющий следующим условиям:

1) функция $F(u, x_1, x_2)$ дифференцируема (а значит, и непрерывна) в C;
2) $F(u, x_1, x_2)$ монотонно возрастает в цилиндре C по переменной u;
3) $F(u, x_1, x_2)$ отрицательна на нижнем основании цилиндра C, и положительна на его верхнем основании.

Обозначим D^2 - двумерный открытый диск (то есть круг), являющийся ортогональной проекцией цилиндра C на плоскость переменных (x_1, x_2). Из условий 1)-3) следует, что над любой точкой $x = (x_1, x_2) \in D^2$ (то есть на интервале $((u_1, x_1, x_2); (u_2, x_1, x_2))$) в цилиндре C существует единственная точка $M(u(x_1, x_2), x_1, x_2)$, в которой $F(M) = 0$. Понятно, что геометрическое место таких точек над диском D^2 представляет собой график искомой неявной функции, которую мы обозначим $u = \varphi(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in D^2$. Единственность этой функции очевидна из её построения.

Покажем теперь, что построенная выше неявная функция непрерывна в области D^2.

При построении функции $u = \varphi(x_1, x_2)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ мы подобрали такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только выполнено неравенство:

$$\|x - x_0\| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} < \delta,$$

для функции $u = \varphi(x_1, x_2)$ немедленно выполняется неравенство: $u_0 - \varepsilon < u_1 < u = \varphi(x_1, x_2) < u_2 < u_0 + \varepsilon$, и следовательно, $|\varphi(x_1, x_2) - u_0| = |\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_{01}, x_{02})| < \varepsilon$. Это означает непрерывность функции $u = \varphi(x_1, x_2)$ в точке (x_{01}, x_{02}). Непрерывность её в любой другой точке $(x_1, x_2) \in D^2$ доказывается совершенно аналогично. (Достаточно вместо δ взять число $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon; x_1, x_2) > 0$ такое, что $D^2_{\tilde{\delta}} \subset D^2$, где $D^2_{\tilde{\delta}}$ - диск радиуса $\tilde{\delta}$ с центром в точке (x_1, x_2).)

Докажем теперь дифференцируемость построенной неявной функции. Поскольку все точки диска D^2 обладают одинаковыми свойствами, то как и при доказательстве непрерывности, достаточно провести доказательство дифференцируемости для точки (x_{01}, x_{02}). Для этого рассмотрим (нулевое) приращение дифференцируемой функции F:

$$0 = \Delta F = F(u_0 + \Delta u, x_{01} + \Delta x_1, x_{02} + \Delta x_2) - F(u_0, x_{01}, x_{02}) =$$
$$= F'_u \Delta u + F'_{x_1} \Delta x_1 + F'_{x_2} \Delta x_2 + \alpha \Delta u + \beta \Delta x_1 + \gamma \Delta x_2,$$

где α, β, γ - бесконечно малые при условии, что норма

$$\|\{\Delta u, \Delta x_1, \Delta x_2\}\| = \sqrt{\Delta u^2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \to 0,$$
$$\Delta u = \Delta \varphi = \varphi(x_{01} + \Delta x_1, x_{02} + \Delta x_2) - \varphi(x_{01}, x_{02}),$$

и все частные производные вычислены в точке (u_0, x_{01}, x_{02}). Отсюда получаем:

(3) $$0 = (F'_u + \alpha)\Delta u + (F'_{x_1} + \beta)\Delta x_1 + (F'_{x_2} + \gamma)\Delta x_2,$$

причём из условия теоремы $F'_u \neq 0$, следовательно, при достаточно малом α будет также $(F'_u + \alpha) \neq 0$. Поэтому из (3) можно выразить приращение неявной функции $\Delta u = \Delta \varphi$. Имеем: $\Delta \varphi = \Delta u = -\dfrac{(F'_{x_1} + \beta)}{(F'_u + \alpha)} \Delta x_1 - \dfrac{(F'_{x_2} + \gamma)}{(F'_u + \alpha)} \Delta x_2$.

Далее, так как $\alpha,\beta,\gamma \to 0$ при $\|\{\Delta u,\Delta x_1,\Delta x_2\}\| \to 0$, то пределы коэффициентов при $\Delta x_1,\Delta x_2$ равны соответственно $-\frac{F'_{x_1}}{F'_u},-\frac{F'_{x_2}}{F'_u}$. Следовательно, сами коэффициенты можно представить в виде сумм этих пределов и некоторых бесконечно малых ξ_1,ξ_2 (при $\|\{\Delta u,\Delta x_1,\Delta x_2\}\| \to 0$). Получаем:

$$\Delta\varphi = \Delta u = \left(-\frac{F'_{x_1}}{F'_u}+\xi_1\right)\Delta x_1 + \left(-\frac{F'_{x_2}}{F'_u}+\xi_2\right)\Delta x_2 = \tag{4}$$

$$= \left(-\frac{F'_{x_1}}{F'_u}\right)\Delta x_1 + \left(-\frac{F'_{x_2}}{F'_u}\right)\Delta x_2 + \xi_1\Delta x_1 + \xi_2\Delta x_2 .$$

Величина $\xi_1\Delta x_1+\xi_2\Delta x_2$ является бесконечно малой при $\|\{\Delta x_1,\Delta x_2\}\| = \sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2} \to 0$. (В самом деле, из условия: $\|\{\Delta x_1,\Delta x_2\}\| \to 0$ следует, в силу непрерывности функции φ, что и $\Delta\varphi = \Delta u \to 0$, а значит, $\|\{\Delta u,\Delta x_1,\Delta x_2\}\| \to 0$). Учитывая это, заключаем, что:

1) равенство (4) показывает, что $\varphi(x_1,x_2)$ дифференцируема в точке (x_{01},x_{02});
2) из равенства (4) видно, что частные производные функции $\varphi(x_1,x_2)$ вычисляются по формулам: $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u}$, $i=1,2$.

Теорема полностью доказана.

В качестве следствия из теоремы 1 о существовании неявной функции можно сформулировать следующее утверждение о существовании и дифференцируемости обратной функции.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в некоторой окрестности точки* x_0, *и её производная* $f'(x)$ *отлична от нуля в точке* x_0 *и непрерывна в этой точке. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая* δ *- окрестность точки* y_0 $(y_0 = f(x_0))$, *в которой единственным образом определена дифференцируемая обратная функция* $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$, *удовлетворяющая условиям:* *1)* $\varphi(y_0) = f^{-1}(y_0) = x_0$,

2) $|\varphi(y) - x_0| < \varepsilon$, *3)* $\varphi'(y) = (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $x = \varphi(y)$ как неявную функцию, определяемую функциональным уравнением: $F(x, y) = f(x) - y = 0$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Из условий следствия ясно, что функция $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, и $F(M_0) = F(x_0, y_0) = 0$. Кроме того, её частная производная $F'_x(M_0) = f'(x_0) \neq 0$, и $F'_x(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Из теоремы 1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность $V_\delta(y_0)$ точки y_0, в которой единственным образом определена неявная функция $x = \varphi(y)$, обращающая равенство: $F(x, y) = f(x) - y = 0$ в тождество: $f(\varphi(y)) \equiv y$, и удовлетворяющая условию: $|\varphi(y) - x_0| < \varepsilon$ всюду в окрестности $V_\delta(y_0)$. Это означает, что $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ - обратная функция к $f(x)$ в рассматриваемой окрестности. Кроме того, из теоремы 1 следует, что эта функция дифференцируема в той же окрестности, и её производная (в данном случае не частная, а полная, так как это функция одной переменной) вычисляется по формуле: $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d(f^{-1})}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} = -\frac{(-1)}{df/dx} = \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}$ (Эта формула для производной обратной функции была получена в первом семестре другим способом). Следствие 1 доказано.

8.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Пусть задано функциональное уравнение (1), и для функции $F(u,x) = F(u,x_1,...,x_n)$ выполнены все условия теоремы 1 в окрестности $V(M_0)$ точки $M_0(u_0,x_1,...,x_n)$. Тогда, по теореме 1, в некоторой окрестности $W(x_0)$ точки $x_0 = (x_1,...,x_n)$ существует единственная дифференцируемая неявная функция $u = u(x) = u(x_1,...,x_n)$, частные производные которой вычисляются по формулам (2). При этом функция $F(u,x)$ и её частные производные, при подстановке в них вместо переменной u неявной функции $u = u(x_1,...,x_n)$, становятся сложными функциями от переменных $(x_1,...,x_n)$. Для вычисления частных производных сложных функций такого типа по переменным $(x_1,...,x_n)$ полезно ввести следующее понятие полной частной производной сложной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Полной частной производной по переменной* x_k сложной функции $\Phi(u(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n)$ называется выражение $\frac{D}{Dx_k}\Phi(u,x_1,...,x_n)$, определяемое из равенства:

$$\frac{D}{Dx_k}\Phi(u,x_1,...,x_n) = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}. \tag{5}$$

Теперь мы можем сформулировать следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если для некоторой функции* $F(u,x)=F(u,x_1,...,x_n)$ *выполнены все условия теоремы 1 в окрестности* $V(M_0)$ *точки* $M_0(u_0,x_1,...,x_n)$, *и сверх того, функция* $F(u,x)=F(u,x_1,...,x_n)$ *дважды дифференцируема в окрестности* $V(M_0)$, *то неявная функция* $u=u(x_1,...,x_n)$, *существующая согласно теореме 1, имеет в некоторой окрестности точки* x_0 *вторые частные производные, вычисляемые по формулам:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{F'_u F''_{x_j u}F'_{x_i}-F''_{x_j x_i}(F'_u)^2-F'_{x_j}F''_{uu}F'_{x_i}+F''_{ux_i}F'_{x_j}F'_u}{(F'_u)^3}. \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём соответствующие вычисления:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=\frac{D}{Dx_i}\left(-\frac{F'_{x_j}}{F'_u}\right)=-\frac{\frac{D}{Dx_i}(F'_{x_j})F'_u-F'_{x_j}\frac{D}{Dx_i}(F'_u)}{(F'_u)^2}=$$

$$=-\frac{(F''_{x_j u}u'_{x_i}+F''_{x_j x_i})F'_u-F'_{x_j}(F''_{uu}u'_{x_i}+F''_{ux_i})}{(F'_u)^2}=$$

$$\frac{-F'_u F''_{x_j u}u'_{x_i}-F'_{x_j x_i}F'_u+F'_{x_j}F''_{uu}u'_{x_i}+F''_{ux_i}F'_{x_j}}{(F'_u)^2}.$$

Далее, подставляя в полученное выражение формулу: $u'_{x_i}=-\dfrac{F'_{x_i}}{F'_u}$, окончательно получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{F'_u F''_{x_j u}F'_{x_i}-F''_{x_j x_i}(F'_u)^2-F'_{x_j}F''_{uu}F'_{x_i}+F''_{ux_i}F'_{x_j}F'_u}{(F'_u)^3},$$

что и требовалось. Утверждение 1 доказано.

Аналогично, при соответствующих условиях на функцию $F(u,x)$, вычисляются частные производные третьего и высших порядков неявной функции $u=\varphi(x)$.

ПРИМЕР 2. Найти частную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$ от неявной функции $u = u(x_1, x_2)$, задаваемой функциональным уравнением: $u^2 + x_1^3 + x_2^3 - 1 = 0$. Используя формулы для частных производных первого порядка и выкладки, приводящие к формуле (6), получим: $u'_{x_1} = -\frac{3x_1^2}{2u}$; $u'_{x_2} = -\frac{3x_2^2}{2u}$; и следовательно, $u''_{x_1 x_2} = \frac{D(u'_{x_1})}{Dx_2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{3x_1^2}{2u}\right)\cdot\left(-\frac{3x_2^2}{2u}\right) = \frac{3x_1^2}{2u^2}\cdot\left(-\frac{3x_2^2}{2u}\right) = -\frac{9x_1^2 x_2^2}{4u^3}$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §8.

1) *Можно ли в приведённом доказательстве теоремы 1 опустить доказательство непрерывности неявной функции, а оставить только доказательство её дифференцируемости (ведь из дифференцируемости, как известно, следует непрерывность)?*
2) *Как вычислить производную 3-го порядка $u'''_{x_1 x_2 x_1}$ для неявной функции u из примера 2? Напишите соответствующую формулу.*
3) *Пользуясь формулами (2) и (6), вычислите производные y'_x, y''_{xx} неявной функции $y = y(x)$, задаваемой уравнением: а) эллипса* $\mathrm{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; *б) гиперболы* $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

§9.
НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИСТЕМОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В §8 мы рассматривали вопрос о существовании и дифференцируемости неявной функции, определяемой одним функциональным уравнением. В этом параграфе мы рассмотрим аналогичный вопрос для совокупности m ($m > 1$) неявных функций, определяемых системой m функциональных уравнений.

Итак, пусть задана система функциональных уравнений:

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{l} F_1(u_1,u_2,\ldots,u_m,x_1,x_2,\ldots,x_n)=0, \\ F_2(u_1,u_2,\ldots,u_m,x_1,x_2,\ldots,x_n)=0, \\ --------------- \\ F_m(u_1,u_2,\ldots,u_m,x_1,x_2,\ldots,x_n)=0. \end{array}\right\},$$

и требуется найти её решение в виде набора функций

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} u_1=\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ u_2=\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m=\varphi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n). \end{array}\right\},$$

обращающих эту систему в систему тождеств в некоторой заданной области $G \subseteq R^n$, где R^n - пространство переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

9.1 УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИСТЕМЫ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Изучим вопрос о разрешимости системы функциональных уравнений (1) относительно $u_1,u_2,\ldots,u_m$. Решение (2) системы (1) мы будем называть *непрерывным и диффе-*

ренцируемым в некоторой области G изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждая из функций (2) непрерывна и дифференцируема в области G.

Рассмотрим m функций $F_1, F_2, \ldots, F_m$, стоящих в левых частях системы (1), и составим из частных производных этих функций определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Будем называть определитель вида (3) *определителем Якоби* (или кратко *якобианом*) функций $F_1, F_2, \ldots, F_m$ по переменным $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и кратко обозначать его символом $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$. Теперь мы можем сформулировать важное обобщение теоремы 1 из §8 .

ТЕОРЕМА 1. (о существовании системы неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений). *Пусть m функций*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \text{-----------------} \\ F_m(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \tag{4}$$

дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0 = M_0(u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0m}, x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in R^{n+m}$, *причем частные* *производные этих функций по переменным* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *непрерывны в точке* M_0*. Тогда, если в точке* M_0 *все функции (4) обращаются в нуль, а якобиан* $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$ *отличен от нуля в* M_0*, то для любых положительных чисел* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *найдется такая окрестность точки* $N_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ *в пространстве* R^n*, в которой существует единственный набор из* m *функций (2), удовлетворяющий условиям:* $|u_1 - u_{01}| < \varepsilon_1, |u_2 - u_{02}| < \varepsilon_2, \ldots, |u_m - u_{0m}| < \varepsilon_m$*, - и являющийся решением системы уравнений (1), причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки* N_0*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что при $m=1$ теорема 1 совпадает с доказанной выше теоремой 1 из §8, поскольку в этом случае якобиан (3) совпадает с частной производной $\dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}$. Проведём рассуждения методом математической индукции. При $m=1$ теорема уже доказана. Поэтому для проведения индукции достаточно предположить её справедливой для системы m-1 функциональных уравнений при некотором $m \geq 2$ и доказать её справедливость для системы m функциональных уравнений.

Итак, по условию теоремы, якобиан

(5) $$\Delta=\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(u_1,u_2,\dots,u_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \dots \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \dots\dots\dots\dots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} \dots \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в точке M_0. Тогда хотя бы один из миноров $(m-1)$-го порядка этого якобиана также отличен от нуля в точке M_0. Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля обведенный пунктиром минор, стоящий в левом верхнем углу функциональной матрицы. Тогда, по предположению индукции, первые $m-1$ уравнений системы (1) разрешимы относительно $u_1,u_2,\dots,u_{m-1}$. Точнее, для достаточно малых положительных чисел $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{m-1}$ найдется такая окрестность точки $\tilde{N}_0(u_{0m},x_{01},\dots,x_{0n})$ пространства R^{n+1} переменных $(u_m,x_1,\dots,x_n)$, в которой единственным образом определены $(m-1)$ функций:

(6) $$\begin{cases} u_1=\Phi_1(u_m,x_1,\dots,x_n) \\ \text{-----------} \\ u_{m-1}=\Phi_{m-1}(u_m,x_1,\dots,x_n) \end{cases},$$

удовлетворяющих условиям $|u_1-u_{01}|<\varepsilon_1,\dots,|u_{m-1}-u_{0m-1}|<\varepsilon_{m-1}$ и являющихся единственным и дифференцируемым решением системы первых $m-1$ уравнений системы (1).

Подставим найденные функции (6) в левую часть последнего из уравнений (1). При этом последняя из функций (4) превращается в некоторую функцию ψ, зависящую только от переменных $u_m,x_1,\dots,x_n$:

$$
(7)\quad \begin{aligned} &F_m(u_1,\dots,u_{m-1},u_m,x_1,\dots,x_n)= \\ &=F_m[\Phi_1(u_m,x_1,\dots,x_n),\dots,\Phi_{m-1}(u_m,x_1,\dots,x_n),u_m,x_1,\dots,x_n]= \\ &=\psi(u_m,x_1,\dots,x_n). \end{aligned}
$$

Таким образом, последнее из уравнений системы (1) превращается в уравнение:

$$
(8)\qquad \psi(u_m,x_1,\dots,x_n)=0.
$$

В силу равенства (7), функцию $\psi(u_m,x_1,\dots,x_n)$ можно рассматривать как сложную функцию. Тогда, применяя теорему о дифференцируемости сложной функции, мы можем утверждать, что функция $\psi(u_m,x_1,\dots,x_n)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $\tilde{N}_0(u_{0m},x_{01},\dots,x_{0n})$ пространства R^{n+1}. Равенство (7) и последнее из уравнений (1) позволяют утверждать, что $\psi(\tilde{N}_0)=\psi(u_{0m},x_{01},\dots,x_{0n})=0$. Поэтому для того, чтобы доказать, что к уравнению (8) применима теорема 1 из §8, и оно разрешимо относительно u_m, достаточно показать, что частная производная $\dfrac{\partial\psi}{\partial u_m}$ непрерывна и отлична от нуля в точке $\tilde{N}_0$. С этой целью вычислим указанную частную производную. Подставим в первые $m-1$ уравнений системы (1) функции (6), являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем полученные при этом тождества по u_m. Получим систему:

$$
(9)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_m}+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_1}{\partial u_m}=0, \\ &\text{--------------------------------} \\ &\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_m}+\dots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m}=0. \end{aligned}
$$

Далее, продифференцируем по u_m равенство (7). Получим:

$$(10)\qquad \frac{\partial F_m}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_m}{\partial u_m}=\frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Умножим теперь равенства (9) и (10) соответственно на алгебраические дополнения $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{m-1}, \Delta_m$ элементов последнего столбца якобиана (5) и затем сложим эти равенства. Получим: $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_m}[\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial u_k}+\Delta_2\frac{\partial F_2}{\partial u_k}+\ldots+\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial u_k}]+$

$$+(\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial u_m}+\Delta_2\frac{\partial F_2}{\partial u_m}+\ldots+\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial u_m})=\Delta_m\frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Так как сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна определителю (нулю), то каждая квадратная скобка равна нулю, а круглая скобка равна якобиану (5). Таким образом, мы получаем равенство (верное в некоторой окрестности точки M_0):

$$(11)\qquad \Delta=\Delta_m\frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Здесь символом Δ обозначен якобиан (5), а Δ_m - алгебраическое дополнение к последнему элементу его последнего столбца, которое совпадает с минором, обведенным пунктиром и, по нашему предположению, отлично от нуля в точке M_0. Из (11), очевидно, следует, что:

$$(12)\qquad \frac{\partial \psi}{\partial u_m}=\frac{\Delta}{\Delta_m}.$$

Формула (12), справедливая в некоторой окрестности точки $\widetilde{N}_0$, доказывает непрерывность частной производной $\frac{\partial \psi}{\partial u_m}$ в точке $\widetilde{N}_0$, так как Δ и Δ_m состоят из частных производных функций (4) по $u_1, u_2, \dots, u_m$, непрерывных в точке M_0. Кроме того, поскольку якобиан Δ отличен от нуля в точке M_0, из (12) следует также, что $\dfrac{\partial \psi}{\partial u_m}$ в точке $\widetilde{N}_0$ отлична от нуля. Итак, доказано, что к уравнению (8) можно применить теорему 1 из §8.

По теореме 1 из §8, для любого положительного числа ε_m найдется такая окрестность точки $N_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ в пространстве R^n, в которой определена функция

(13) $$u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

удовлетворяющая условию: $|u_m - u_{0m}| < \varepsilon_m$, и являющаяся, при наличии этого условия, единственным, непрерывным и дифференцируемым решением уравнения (8).

Имея в виду, что функции (6) являются решением первых $(m - 1)$ уравнений (1) при любых u_m, $x_1, \dots, x_n$ из окрестности точки $\widetilde{N}_0$, и подставляя найденную функцию (13) в (6), мы получим функции $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$, зависящие только от переменных $x_1, \dots, x_n$:

$$u_1 = \Phi_1[\varphi_m(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n] = \varphi_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$u_{m-1} = \Phi_{m-1}[\varphi_m(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n] = \varphi_{m-1}(x_1, \dots, x_n).$$

По теореме о дифференцируемости сложной функции, каждая из функций $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ дифференцируема в окрестности точки $N_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$. Таким образом, мы доказали, что m функций

(14) $$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ u_m &= \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяют в окрестности точки $N_0(x_{01},...,x_{0n})$ условиям: $|u_1-u_{01}|<\varepsilon_1,...,|u_m-u_{0m}|<\varepsilon_m$ - и являются, при наличии этих условий, непрерывным и дифференцируемым в некоторой окрестности точки $N_0(x_{01},...,x_{0n})$ решением системы (1).

Покажем, что функции (14) представляют собой единственное решение системы (1), удовлетворяющее условиям $|u_1-u_{01}|<\varepsilon_1,...,|u_m-u_{0m}|<\varepsilon_m$ (при достаточно малых положительных $\varepsilon_1,...,\varepsilon_m$). Фактически это следует из их построения.

В самом деле, предположим, что кроме функций (14) существует другой набор из m функций

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \hat{\varphi}_1(x_1,x_2,...,x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \hat{u}_m &= \hat{\varphi}_m(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

также являющихся решением системы (1) и удовлетворяющих условиям $|\hat{u}_1-u_{01}|<\varepsilon_1,...,|\hat{u}_m-u_{0m}|<\varepsilon_m$. Тогда, по предположению индукции, первые *(m – 1)* функций (15), рассматриваемые как функции от переменных $u_m,x_1,...,x_n$, представляют собой при заданном $u_m=\hat{u}_m$ единственное и дифференцируемое решение системы первых *m–1* уравнений (1). Но при заданном u_m единственное решение системы *m–1* уравнений (1) дается равенствами (6). Таким образом, справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \Phi_1(\hat{u}_m,x_1,...,x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \hat{u}_{m-1} &= \Phi_{m-1}(\hat{u}_m,x_1,...,x_n) \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

в которых $\Phi_1,...,\Phi_{m-1}$ - те же функции, что и (6).

В таком случае, последнее уравнение (1) и соотношение (7) позволяют нам утверждать, что $\hat{u}_m$ является единственным решением уравнения (8), т.е. $\hat{u}_m = u_m$.

При наличии равенства $\hat{u}_m = u_m$ из соотношений (6) и (16) сразу же вытекает, что $\hat{u}_1 = u_1, \ldots, \hat{u}_{m-1} = u_{m-1}$, то есть найденное решение (14) является единственным.

Теорема 1 полностью доказана.

9.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СИСТЕМЫ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Пусть выполнены условия теоремы 1, и требуется вычислить частные производные функций (14). Подставим функции (14) в систему уравнений (1), решением которой они являются, и продифференцируем получившиеся тождества по x_l $(l = 1, 2, \ldots, n)$. Получим систему:

$$(17) \qquad \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_l} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_l} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_l} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_l} = 0 \end{array}\right\}$$

Это система линейных уравнений относительно m неизвестных $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_l}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x_l}$. Определитель этой системы, то есть якобиан (5), отличен от нуля в окрестности точки M_0. Значит, система (7) имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$(18) \qquad \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_l, u_{k+1}, \ldots, u_m)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}},$$

$l = 1, \ldots, n$.

Выражения для частных производных второго и последующих порядков можно получить посредством дифференцирования этих формул.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §9.

1) *Останется ли формулировка теоремы 1 эквивалентной исходной, если заменить в ней набор произвольных положительных чисел $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ на набор $(\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ - одинаковых положительных чисел, то есть просто задать одно положительное число ε?*
2) *Напишите подробное выражение для определителя, стоящего в числителе формулы (18).*
3) *Почему определитель системы (17) отличен от нуля в окрестности точки M_0?*

§10.
ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ.

Понятие зависимости и независимости функций, рассматриваемое в этом параграфе, является обобщением известного из линейной алгебры понятия линейной зависимости и независимости элементов линейного пространства.

В курсе линейной алгебры рассматривается понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. Например, в линейном пространстве функций n переменных, определённых на области $G, G \subset R^n$, $m\ (m>1)$ функций называются *линейно зависимыми*, если хотя бы одна из этих функций представляется в виде линейной комбинации (то есть линейной функции) остальных, и это равенство тождественно на области G.

Сейчас мы рассмотрим более общее понятие зависимости функций, чем линейная зависимость. Пусть в некоторой области $G, G \subset R^n$, определены и дифференцируемы $m\ (m>1)$ функций:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1,\dots,x_n) = \varphi_1(x) \\ ------------ \\ u_m = \varphi_m(x_1,\dots,x_n) = \varphi_m(x) \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u_k = \varphi_k(x)$ из набора (1) называется *(гладко) зависящей* от остальных функций этого набора, если для любого $x \in G$ верно равенство: $u_k(x) = \Phi(u_1(x),\dots,u_{k-1}(x),u_{k+1}(x),\dots,u_m(x))$, где $\Phi = \Phi(w_1,\dots,w_{m-1})$, некоторая функция, определённая и дифференцируемая в соответствующей области изменения своих аргументов. Функции набора (1) будем называть *(гладко) зависимыми в области* G, если хотя бы одна из них зависит от остальных в области G. В противном случае функции набора (1) называются *независимыми в области* G.

Рассмотрим простые примеры зависимых и независимых функций.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функции двух переменных $\varphi_1(x,y)=x+y$, $\varphi_2(x,y)=xy$, $\varphi_3(x,y)=x^2+y^2$. Функции $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ *зависимы во всём пространстве* R^2, поскольку равенство: $\varphi_3(x,y)=[\varphi_1(x,y)]^2-2\varphi_2(x,y)$. верно для всех $(x,y)\in R^2$

ПРИМЕР 2. Функции $u_1(x,y)=x+y, u_2(x,y)=x-y$ являются *независимыми* в любой области $\Omega, \Omega\subset R^2$, такой, что $(0;0)\in\Omega$.

В самом деле, если взять $x=y$, то $u_1(x,x)=2x$, $u_2(x,x)=x-x\equiv 0$. Следовательно, в этом случае, то есть на пересечении области Ω с прямой $L_1: x=y$, функция u_1 не выражается через u_2. Аналогично, на пересечении области Ω с прямой $L_2: x=-y$, функция u_2 не выражается через u_1, так как в этом случае $u_1(x,-x)\equiv 0$, $u_2(x,-x)=2x$. Если область Ω содержит точку $(0;0)$, то она заведомо содержит и некоторую окрестность этой точки, а значит, и точки вида $(x;x), (x;-x)$, где $x\neq 0$. Поэтому в такой области ни одну из указанных функций нельзя выразить через другую.

10.1 ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ.

Рассмотрим теперь условия, при которых данный конечный набор функций является независимым.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть задан набор функций:* $u_1 = \varphi_1(x_1,...,x_n)$, ..., $u_m=\varphi_m(x_1,...,x_n)$, *где* $n\geq m>1$. *Пусть все* *функции этого набора определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_{01},...,x_{0n})$. Тогда, если якобиан из этих функций по каким-либо m переменным отличен от нуля в точке M_0, то функции данного набора независимы в некоторой окрестности точки M_0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля якобиан

$$(2)\qquad \frac{D(u_1,u_2,...,u_m)}{D(x_1,x_2,...,x_m)}.$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что функции $u_1,u_2,...,u_m$ зависимы в некоторой окрестности точки M_0, т.е. одна из этих функций, например u_k, всюду этой окрестности выражается в виде $u_k=\Phi(u_1,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_m)$, где Φ – некоторая дифференцируемая функция. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислим производную функции u_k по любой из переменных x_l (l = 1, 2, ..., m). Получаем следующие равенства:

$$(3)\qquad \frac{\partial u_k}{\partial x_l}=\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_l}+...+\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k-1}}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_l}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k+1}}\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_l}+...$$

$$...+\frac{\partial\Phi}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\qquad (l=1,\ 2,\ ...,\ m).$$

Формулы (3), рассматриваемые в точке M_0, показывают, что k-я строка якобиана (2) представляет собой линейную комбинацию остальных его строк с коэффициентами, соответственно равными $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\frac{\partial\Phi}{\partial u_2},...,\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k-1}},\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k+1}},...,\frac{\partial\Phi}{\partial u_m}$ (все производные вычислены в точке M_0). Но в этом случае якобиан (2) равен нулю в точке M_0, что противоречит условию теоремы. Доказательство закончено.

ПРИМЕР 3. Выше (см. пример 2) рассматривались две функции $u_1 = x + y$ и $u_2 = x - y$, и с помощью определения 1 была показана их независимость в окрестности точки $(0;0)$. Применяя к этим функциям теорему 1, получаем, что они независимы в окрестности любой точки пространства R^2, поскольку якобиан $\frac{D(u_1,u_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ всюду в R^2.

10.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.

Пусть снова задан набор из m функций от n переменных (1). Будем предполагать, что функции (1) определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_{01},...,x_{0n})$, причем все частные производные первого порядка этих функций непрерывны в самой точке M_0.

Рассмотрим вопрос о том, какие из функций набора (1) являются независимыми. С этой целью составим из частных производных всех функций (1) следующую функциональную матрицу:

$$(4)\qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix},$$

содержащую m строк и n столбцов. Справедливо следующее замечательное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в описанных выше условиях функциональная матрица (4) обладает свойствами:*

1) *некоторый минор r-го порядка отличен от нуля в точке $M_0(x_{01},x_{02},...,x_{0n})$;*

2) все миноры (r + 1)-го порядка равны нулю в некоторой окрестности точки M_0.

Тогда r функций, представленных в указанном миноре r-го порядка, независимы в окрестности точки M_0, а каждая из остальных функций зависит в этой окрестности от указанных r функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что в точке M_0 отличен от нуля минор, стоящий в левом верхнем углу матрицы (4), т.е. определитель:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_r} \\ \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тогда из теоремы 1 сразу вытекает независимость функций $u_1, u_2, ..., u_r$ в окрестности точки M_0. Остается доказать, что любая из остальных функций $u_{r+1}, ..., u_m$ зависит в окрестности M_0 от $u_1, u_2, ..., u_r$. Докажем, например, что u_{r+1} зависит в окрестности M_0 от $u_1, u_2, ..., u_r$.

Пусть значения первых r функций $u_1, u_2, ..., u_r$ в точке M_0 равны: $u_{01} = \varphi_1(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, ..., $u_{0r} = \varphi_r(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$. Заметим, что эти первые r функций $u_1, u_2, ..., u_r$ набора (1) представляют собой единственное и дифференцируемое решение следующей системы уравнений:

$$(6)\qquad \left.\begin{array}{l} F_1(u_1,...,u_r,x_1,...,x_n) \equiv \varphi_1(x_1,...,x_n) - u_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_r(u_1,...,u_r,x_1,...,x_n) \equiv \varphi_r(x_1,...,x_n) - u_r = 0 \end{array}\right\},$$

в некоторой окрестности точки $N_0(u_{01},...,u_{0r},x_{01},...,x_{0n})$ $(n+r)$-мерного пространства переменных $(u_1,...,u_r,x_1,...,x_n)$, поскольку в указанной точке $N_0(u_{01},\dots,u_{0r},x_{01},\dots,x_{0n})$ якобиан $\dfrac{D(F_1,\dots,F_r)}{D(u_1,\dots,u_r)}=(-1)^r\neq 0$, и следовательно, выполнены все условия теоремы 1 из §9 (о существовании системы неявных функций).

С другой стороны, поскольку якобиан $\dfrac{D(F_1,\dots,F_r)}{D(x_1,\dots,x_r)}$, совпадающий с минором (5), также отличен от нуля в точке N_0, то систему (6) можно в окрестности этой точки однозначно разрешить и относительно переменных $x_1,\dots,x_r$. То есть всюду в достаточно малой окрестности точки N_0 система (6) имеет единственное и дифференцируемое решение

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\psi_1(u_1,\dots,u_r,x_{r+1},\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r=\psi_r(u_1,\dots,u_r,x_{r+1},\dots,x_n) \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Заметим, что равенства (7) и первые r равенств из (1) полностью эквивалентны в окрестности точки N_0. В частности, если подставить величины $x_1,x_2,\dots,x_r$, определяемые уравнениями (7), в первые r равенств (1), то указанные равенства обратятся в следующие тождества относительно (независимых) переменных $x_{r+1},\dots,x_n,u_1,\dots,u_r$:

$$\begin{cases} \varphi_1(\psi_1,\dots,\psi_r,x_{r+1},\dots,x_n)\equiv u_1 \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \varphi_m(\psi_1,\dots,\psi_r,x_{r+1},\dots,x_n)\equiv u_r \end{cases}$$

Продифференцируем эти тождества по переменным x_l $(l=r+1,\dots,n)$ и учитывая, что $u_1,\dots,u_r$ не зависят от $x_{r+1},\dots,x_n$, получим следующую систему:

$$
(8)\qquad \left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_l}+\ldots+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_r}\dfrac{\partial\psi_r}{\partial x_l}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_l}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_1}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_l}+\ldots+\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_r}\dfrac{\partial\psi_r}{\partial x_l}+\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_l}=0.
\end{array}\right\}
$$

Заметим, что равенства (8) справедливы для всех точек $M(x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots x_n)$ из некоторой окрестности точки M_0.

Для того, чтобы показать. что функция u_{r+1} зависит в некоторой окрестности точки M_0 только от $u_1,\ldots,u_r$, подставим значения $x_1,\ldots,x_r$, определяемые уравнениями (7), в (r+1)-е равенство системы (1). При этом получим: $u_{r+1}=\varphi_{r+1}(x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots,x_n)=\varphi_{r+1}[\psi_1(u_1,\ldots,u_r,x_{r+1},\ldots,x_n),\ldots$ $\ldots,\psi_r(u_1,\ldots,u_r,x_{r+1},\ldots,x_n),x_{r+1},\ldots,x_n]=\Phi(u_1,\ldots,u_r,x_{r+1},\ldots,x_n)$, то есть фактически u_{r+1} превращается в функцию аргументов $u_1,\ldots,u_r,x_{r+1},\ldots,x_n$, которую мы обозначили символом Ф.

Остается доказать, что для всех значений переменных $x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots x_n$, лежащих в достаточно малой окрестности точки M_0, функция Ф на самом деле не зависит от $x_{r+1},\ldots,x_n$. Для этого достаточно доказать, что для всех $x_1,\ldots,x_n$ из достаточно малой окрестности точки M_0 справедливы равенства:

$$
(9)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}=0 \quad (l=r+1,\ldots,n).
$$

Продифференцируем функцию Ф по переменной x_l ($l=r+1,\ldots,n$) как сложную функцию. Получим:

$$
(10)\qquad \frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_r}\frac{\partial\psi_r}{\partial x_l}+\frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_l}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}.
$$

Рассмотрим теперь следующий минор (r + 1)-го порядка матрицы (4):

$$(11) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_l} \\ \frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_r} & \frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_l} \end{vmatrix}.$$

По условию теоремы этот минор равен нулю всюду в окрестности точки M_0. Умножим равенства (8) и (10) на соответствующие алгебраические дополнения $\Delta_1,\dots,\Delta_r,\Delta_{r+1}$ элементов последнего столбца минора (11) и после этого сложим все эти равенства. В силу теоремы о том, что сумма произведений элементов данного столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна определителю (нулю), получим

$$(12) \qquad \Delta = \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}\Delta_{r+1}.$$

В равенстве (12) символ Δ обозначает минор (11), равный нулю всюду в окрестности точки M_0, а алгебраическое дополнение Δ_{r+1} совпадает с минором (5), отличным от нуля в точке M_0, а значит (в силу непрерывности всех частных производных, входящих в него) и в некоторой окрестности этой точки. Из равенства (12) поэтому заключаем, что всюду в некоторой окрестности точки M_0 справедливы равенства (9). Теорема доказана.

ПРИМЕР 4. Исследуем зависимость функций:

$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad u_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Функциональная матрица (4) имеет в данном случае следующий вид:

$$\left\|\begin{matrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2+x_3+x_4) & 2(x_1+x_3+x_4) & 2(x_1+x_2+x_4) & 2(x_1+x_2+x_3) \end{matrix}\right\|.$$

Легко убедиться в том, что все определители третьего порядка тождественно равны нулю. При этом в любой точке пространства (x_1, x_2, x_3, x_4), у которой не все четыре координаты x_1, x_2, x_3, x_4 совпадают, хотя бы один из определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- отличен от нуля. Значит, в окрестности любой из указанных точек u_1 и u_2 независимы, а u_3 зависит от u_1 и u_2.

В частности, мы ещё раз подтвердили зависимость функции $\varphi_3(x,y) = x^2 + y^2$ от функций $\varphi_1(x,y) = x + y$, $\varphi_2(x,y) = xy$ в Примере 1.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §10.

1) *В какой области пространства R^3 переменных x,y,z являются независимыми функции e^{xy}, e^{yz}, e^{xz}?*
2) *Даны функции: $u_1 = x + y + z$; $u_2 = x - y$; $u_3 = x + 3y + 2z$. Что можно сказать о зависимости или независимости этого набора? Укажите все возможные подмножества независимых функций из данного набора.*
3) *Верно ли, что (гладкая) зависимость набора дифференцируемых функций вида (1) при m=n в некоторой окрестности точки $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ эквивалентна линейной зависимости их дифференциалов в данной точке*

x_0? Если да – докажите. Если нет – приведите соответствующие примеры.

§11.
УСЛОВНЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Данный параграф посвящён понятию условного локального экстремума функции многих переменных, более общему, чем понятие локального экстремума, изложенное в предыдущем параграфе.

Итак, теперь наша цель – рассмотреть более общее понятие *условного* локального экстремума и способы его отыскания. В точке локального экстремума - например, локального максимума - функция принимает значение, которое больше (а в случае локального минимума - меньше) значений этой функции во всех точках некоторой окрестности. Однако довольно часто в практических задачах требуется отыскать точку, в которой данная функция принимает значение, большее (или меньшее) её значений не во всей окрестности этой точки, а лишь в некоторой её части, точки которой удовлетворяют специальным условиям (так называемым условиям связи). Эти условия связи обычно задают набором уравнений.

ПРИМЕР 1. Пусть требуется найти экстремум функции $z = x^2 - y^2$ на прямой $L: y = 2x$. Таким образом, переменные x и y связаны между собой уравнением: $F(x,y)= y - 2x = 0$. Эта задача легко решается. Достаточно подставить равенство: $y = 2x$ в выражение для функции, и мы получим: $z = x^2 - 4x^2 = -3x^2$. Так как полученная функция всюду отрицательна, кроме точки 0, где она равна 0, то очевидно, что $x_0 = 0$ - точка её максимума (даже не локального, а глобального). Однако исходная функция $z = x^2 - y^2$ в точке (0;0) не имеет локального экстремума, в чём нетрудно убедиться.

На Рис. 5 ниже показан ещё один наглядный пример условного локального экстремума. Поверхность S задана уравнением $S: \ z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (эллиптический параболоид). Функция $f(x,y)$ не имеет локального экстремума в точке A. Однако, если рассматривать пересечение поверхности S с плоскостью Q, представляющее собой параболу, то есть рассматривать функцию $f(x,y)$ при условии, что переменные x, y связаны уравнением плоскости Q, то с этой точки зрения точка A является локальным минимумом. Таким образом, это условный локальный минимум.

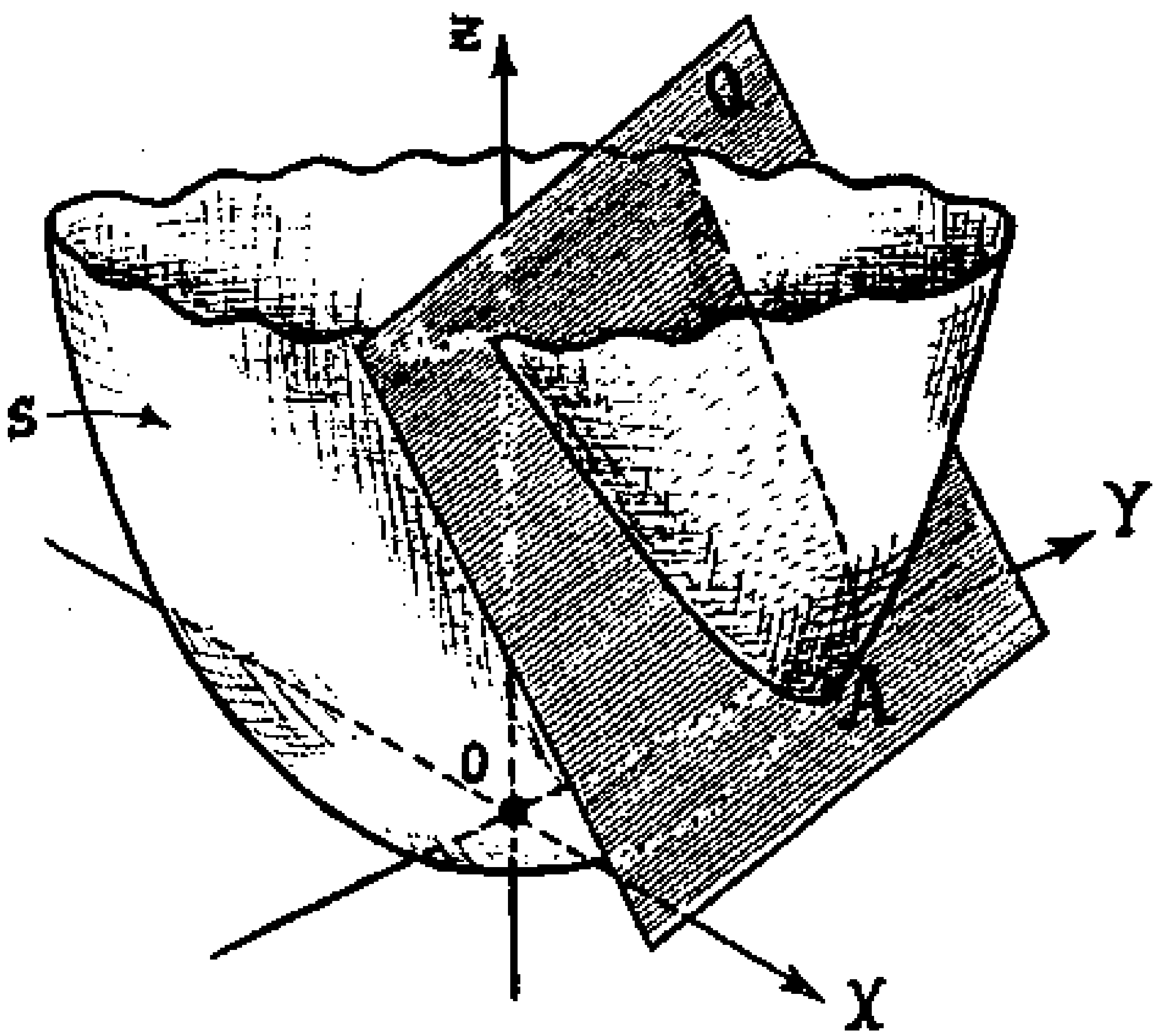

РИС.5

Сформулируем теперь общее понятие условного локального экстремума. Пусть в некоторой области $G \subseteq R^{n+m}$ задана функция $n + m$ переменных $u = f(x_1,...,x_n, y_1,...,y_m)$ и система уравнений:

$$(1)\qquad \begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ ----------- \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Условным локальным экстремумом* функции f при условиях связи (1) называется точка $M_0(x_{01},\dots,x_{0n},y_{01},\dots,y_{0m})$ такая, что её координаты удовлетворяют условиям связи (1), и существует окрестность точки M_0, в пределах которой значение функции $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди её значений во всех точках этой окрестности, которые удовлетворяют условиям связи (1).

Рассмотрим теперь задачу об отыскании условного локального экстремума функции $u=f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ при условиях связи (1).

11.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА.

Выясним, каковы необходимые условия существования условного локального экстремума в рассматриваемой точке M_0.

Для решения этого вопроса будем предполагать, что все функции в левых частях системы (1) дифференцируемы в некоторой окрестности рассматриваемой точки M_0, Их частные производные по переменным $(y_1,\dots,y_m)$ непрерывны в самой точке M_0, и якобиан $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\neq 0$ в точке M_0. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 из §9 о существовании системы неявных функций, и следовательно, для любых положительных чисел $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_m$ найдётся окрестность точки $x_0=(x_{01},\dots,x_{0n})$, в которой единственным образом определён набор из m дифференцируемых неявных функций:

(2) $$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,..,x_n) \\ -------- \\ y_m = \varphi_m(x_1,...,x_n) \end{cases},$$

определяемых системой функциональных уравнений (1) и удовлетворяющих неравенствам: $|y_1 - u_{01}| < \varepsilon_1, |y_2 - u_{02}| < \varepsilon_2$, $..., |y_m - u_{0m}| < \varepsilon_m$. Подставив равенства (2) в функцию $u = f(x_1,...,x_n, y_1,...,y_m)$, мы сведём нашу задачу к задаче об отыскании обычного локального экстремума функции

(3) $u = f(x_1,...,x_n, \varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_m(x_1,...,y_n)) \equiv \Phi(x_1,...,x_n)$

в точке $N_0(x_{01},...,x_{0n})$. Необходимые условия для этого нам известны (см. теорему 1 из §7). А именно, если в точке $N_0(x_{01},...,x_{0n})$ имеется локальный экстремум дифференцируемой функции $\Phi(x_1,...,x_n)$, то её дифференциал в этой точке равен нулю при любых достаточно малых приращениях переменных, то есть имеет место равенство: $d\Phi = \Phi'_{x_1}dx_1 + ... + \Phi'_{x_n}dx_n = 0$ (все частные производные вычислены в точке N_0). Далее, в силу тождества (3) и инвариантности формы записи первого дифференциала, имеем равенство:

(4) $d\Phi = df = f'_{x_1}dx_1 + ... + f'_{x_n}dx_n + f'_{y_1}dy_1 + ... + f'_{y_m}dy_m = 0$.

В равенстве (4) дифференциалы $dy_i = d\varphi_i$ $(i = 1,...,m)$ - это дифференциалы найденных неявных функций. Они могут быть выражены через дифференциалы $dx_1,...,dx_n$ в виде их линейных комбинаций следующим образом. При подстановке неявных функций $\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)$ в систему уравнений связи (1) в некоторой окрестности точки $N_0(x_{01},...,x_{0n})$ возникает система тождеств:

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x)) \equiv 0 \\ ------------------ \\ F_m(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

Дифференцируя тождества (5), получаем линейную систему:

$$(6) \qquad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m = 0 \\ ---------------------------- \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m = 0 \end{cases}$$

(Напомним ещё раз, что все частные производные вычислены в точке $N_0(x_{01},\ldots,x_{0n})$). В силу наложенного ранее условия: $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)} \neq 0$, - система (6) имеет единственное решение относительно дифференциалов $dy_1 = d\varphi_1$, ..., $dy_m = d\varphi_m$, выражающееся по формулам Крамера. То есть каждый из дифференциалов $dy_1,\ldots,dy_m$ представляется в виде некоторой линейной комбинации дифференциалов $dx_1,\ldots,dx_n$. Подставляя эти линейные комбинации в равенство (4) и приводя подобные члены, получим уравнение вида: $A_1dx_1 + \ldots + A_ndx_n = 0$. (Можно отметить, что полученные константы $A_1,\ldots,A_n$ - это просто частные производные в точке N_0 вышеупомянутой функции $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$). Отсюда получаем, что необходимыми условиями локального условного экстремума при описанных условиях является равенство нулю указанных констант, то есть равенства:

$$(7) \qquad A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0.$$

Резюмируем теперь наши рассуждения.

ВЫВОД (Необходимые условия условного локального экстремума). *Если система (1) уравнений связи удовлетво-*

ряет (по отношению к переменным $y_1,\dots,y_m$) в окрестности точки $M_0(x_{01},\dots,x_{0n},y_{01},\dots,y_{0m})$ условиям теоремы о существовании системы дифференцируемых неявных функций (теорема 1 из §9), то необходимыми условиями для существования условного локального экстремума у функции $u=f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ в точке M_0 являются равенства (7), получаемые из уравнения (4) и системы (6). Поэтому в описанных условиях для отыскания $n+m$ координат точки возможного условного экстремума следует решить следующую систему из $n+m$ уравнений:

$$\begin{cases} A_1=A_2=\dots=A_n=0 \\ F_1(x_1,\dots x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ -------------- \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$$

11.2. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА.

Рассмотрим теперь метод, предложенный Лагранжем для отыскания локального условного экстремума. Этот метод, как мы увидим ниже, позволяет вывести и необходимые, и достаточные условия для существования условного локального экстремума рассматриваемой функции в данной точке M_0. В предыдущих рассмотрениях задачи о существовании условного экстремума мы опирались на то, что переменные $y_1,\dots,y_m$ являются неявными функциями от $x_1,\dots,x_n$, задаваемыми уравнениями связи (1). В методе Лагранжа отсутствует (в явном виде) представление переменных $y_1,\dots,y_m$ как функций от $x_1,\dots,x_n$, то есть происходит симметризация переменных, они становятся равноправными.

Пусть по-прежнему задана функция $n+m$ переменных $u = f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$ и система уравнений (или условий) связи (1). Требуется найти необходимые и достаточные условия для существования в данной точке $M_0(x_{01},...,x_{0n},y_{01},...,y_{0m})$ условного локального экстремума функции $u = f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$ при условиях связи (1).

Для решения этой задачи предлагается рассмотреть специальную функцию, которая носит имя Лагранжа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Функцией Лагранжа* рассматриваемой задачи называется функция (от $n+m$ переменных $x_1,...,x_n,y_1,...,y_m$):

(8) $$L(x,y) = f(x,y) + \lambda_1 F_1(x,y) + ... + \lambda_m F_m(x,y),$$

где $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_m)$, $\lambda_j \in R$, $j = 1,...,m$.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ПО МЕТОДУ ЛАГРАНЖА.

Будем предполагать, как и выше, функции $f(x,y)$, $F_1(x,y),...,F_m(x,y)$ дифференцируемыми в окрестности точки $M_0(x_{01},...,x_{0n},y_{01},...,y_{0m})$. В этих условиях функция Лагранжа (8) также дифференцируема. Будем (как и выше) предполагать также, что частные производные функций $F_1(x,y),...,F_m(x,y)$ по переменным $(y_1,...,y_m)$ непрерывны в самой точке M_0, и якобиан $\dfrac{D(F_1,...,F_m)}{D(y_1,...,y_m)} \neq 0$ в точке M_0.

Пусть известно, что в точке M_0 у функции $f(x,y)$ имеется условный экстремум при условиях связи (1). Выясним, каким обязательным условиям должны удовлетворять в этом случае её координаты.

В силу сделанных выше предположений, мы по-прежнему располагаем равенствами (4) и (6). Умножим каждое из равенств (6) на произвольные (пока неопределённые) постоянные множители $\lambda_1,...,\lambda_m$. Полученные после этого умножения равенства сложим почленно с равенством (4). В результате получается равенство:

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{n}\Big(f'_{x_i}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(F_k)'_{x_i}\Big)dx_i+\sum_{j=1}^{m}\Big(f'_{y_j}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(F_k)'_{y_j}\Big)dy_j=$$
$$=L'_{x_1}dx_1+\ldots+L'_{x_n}dx_n+L'_{y_1}dy_1+\ldots+L'_{y_m}dy_m=dL=0.$$

Подберём набор констант (неопределённых множителей) $\lambda_0=(\lambda_{01},\ldots,\lambda_{0m})$ так, чтобы все коэффициенты при dy_j в (9) равнялись нулю ($j=1,\ldots,m$). Это означает, что $\lambda_0=(\lambda_{01},\ldots,\lambda_{0m})$ должно быть решением системы:

$$(10)\qquad \begin{cases} L'_{y_1}=f'_{y_1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(F_k)'_{y_1}=0\\ -----------------\\ L'_{y_m}=f'_{y_m}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(F_k)'_{y_m}=0\end{cases}$$

В силу наложенного выше условия, что $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\neq 0$ в точке M_0, такой набор констант $\lambda_0=(\lambda_{01},\ldots,\lambda_{0m})$ определяется из системы (10) единственным образом по формулам Крамера. Равенство же (9), при подстановке в него набора $\lambda_0=(\lambda_{01},\ldots,\lambda_{0m})$, приобретает вид:

$$(11)\qquad dL=\sum_{i=1}^{n}\Big(f'_{x_i}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{0k}(F_k)'_{x_i}\Big)dx_i=0,$$

Отсюда, в силу независимости переменных $x_1,\ldots,x_n$, следуют равенства:

$$(12)\qquad f'_{x_i}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{0k}\cdot(F_k)'_{x_i}=0,\qquad i=1,\ldots,n.$$

Объединяя систему (10) с системой (12), и присоединяя к ним систему уравнений связи (1), получим следующую итоговую систему из $n+2m$ уравнений, которым при данных условиях обязаны удовлетворять координаты точки условного экстремума:

$$(13)\qquad \begin{cases} f'_{x_1}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k(F_k)'_{x_1}=0 \\ \text{-------------} \\ f'_{x_n}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k(F_k)'_{x_n}=0 \\ f'_{y_1}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k(F_k)'_{y_1}=0 \\ \text{-------------} \\ f'_{y_m}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k(F_k)'_{y_m}=0 \\ F_1(x_1,\dots,x_n y_1,\dots,y_m)=0 \\ \text{-------------} \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$$

Таким образом, каждой точке $M_0(x_{01},\dots,x_{0n},y_{01},\dots,y_{0m})$ условного экстремума при предположениях, перечисленных выше, соответствует единственное решение $(x_{01},\dots,x_{0n},y_{01},\dots,y_{0m},\lambda_{01},\dots,\lambda_{0m})$ системы (13). Поэтому для поиска точек возможного условного экстремума следует решить систему (13) и исключить из полученных решений параметры $\lambda_0=(\lambda_{01},\dots,\lambda_{0m})$. Тогда оставшиеся координаты $(x_0,y_0)=(x_{01},\dots,x_{0n},y_{01},\dots,y_{0m})$ и есть координаты возможного условного экстремума.

ВЫВОД. Система (13) представляет собой совокупность *необходимых условий (по методу Лагранжа) существования условного локального экстремума.*

(Можно отметить, что система (13) получается как равенство нулю всех частных производных функции Лагранжа, если формально рассматривать эту функцию как функцию $n+2m$ независимых переменных. В этом и состоит идея *симметризации переменных* в методе Лагранжа).

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ПО МЕТОДУ ЛАГРАНЖА.

Рассмотрим теперь вопрос о достаточных условиях для существования условного локального экстремума. Пусть в точке $M_0(x_{01},\dots,x_{0n},y_{01},\dots,y_{0m})$ выполнены необходимые условия существования условного экстремума (то есть её координаты удовлетворяют системе (13)). Пусть также функции $u=f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ и $F_j(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$, $(j=1,\dots,m)$, дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0, и их частные производные второго порядка непрерывны в самой точке M_0.

Заметим, что в силу условий связи (1), приращения $\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ и $\Delta L=L(x,y,\lambda_0)-L(x_0,y_0,\lambda_0)$ функций f и L совпадают, где λ_0 есть решение системы (10). Поэтому наличие условного локального экстремума при условиях связи (1) в точке M_0 у функции $f(x,y)$ равносильно наличию (при тех же условиях связи) локального экстремума в точке M_0 у функции $L(x,y,\lambda_0)$. Функция $L(x,y,\lambda_0)$ является сложной, так как условия связи (1) задают неявную зависимость переменных $y=(y_1,\dots,y_m)$ от переменных $x=(x_1,\dots,x_n)$. Однако, в силу системы (10), все её первые частные производные по переменным $y_1,\dots,y_m$ равны нулю при $\lambda=\lambda_0$, поэтому второй дифференциал функции $L(x,y,\lambda_0)$ в точке M_0 имеет такой же вид квадратичной формы, как второй дифференциал функции *независимых* переменных. А именно:

$$(14)\qquad d^2L=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2 L.$$

Теперь ещё раз напомним, что мы ищем условный экстремум, поэтому на множестве, где осуществляется этот поиск, тождественно выполняются уравнения (1). Поэтому мы можем продифференцировать их и получить систему, аналогичную системе (6) в начале параграфа. Следует однако отметить, что здесь, в методе Лагранжа, мы не пользуемся представлением $y_1,\ldots,y_m$ как неявных функций от $x_1,\ldots,x_n$, и вместо тождества (5) пользуемся непосредственно тождеством (1). Итак, получаем систему:

$$
(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m=0 \\ \text{-------------------------------} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m=0 \end{cases}
$$

В силу ранее наложенного условия, что в точке M_0 якобиан $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\neq 0$, из системы (15) дифференциалы $dy_1,\ldots,dy_m$ однозначно, по формулам Крамера, выражаются через дифференциалы независимых переменных $dx_1,\ldots,dx_n$ в виде их линейных комбинаций. Подставляя эти выражения в (14), получим квадратичную форму:

$$
(16) \qquad d^2L=K(dx_1,\ldots,dx_n),
$$

зависящую уже только от дифференциалов $dx_1,\ldots,dx_n$. Отсюда следует, что если квадратичная форма (16) является положительно (отрицательно) определённой, то в рассматриваемой точке M_0 имеется условный локальный минимум (максимум). Если же форма $d^2L=K(dx_1,\ldots,dx_n)$ знакопеременна, то условного экстремума в точке M_0 нет.

Подытожим теперь наши рассуждения.

ВЫВОД (Достаточные условия существования условного локального экстремума). *Пусть координаты точки* $M_0(x_{01},\ldots,x_{0n},y_{01},\ldots,y_{0m})$ *удовлетворяют системе (13), и* *кроме того, функция $u = f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$ и все функции $F_j(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$, $(j=1,...,m)$, дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0, и их частные производные второго порядка непрерывны в самой точке M_0. Тогда достаточным условием для существования условного экстремума функции $u = f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$ в этой точке при условиях связи (1) является знакоопределённость квадратичной формы (16) второго дифференциала $d^2 f$ в точке M_0. Если же квадратичная форма (16) знакопеременна, то условного локального экстремума в точке M_0 нет.*

Добавим, что в случае квази-знакоопределённости квадратичной формы $d^2L = K(dx_1,...,dx_n)$ ответ неясен.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию трёх переменных $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Требуется найти её условный локальный экстремум при наличии условия связи: $F(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$. Используем метод Лагранжа. Функция Лагранжа в данном случае имеет вид: $L(x_1,x_2,x_3,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + 1)$. Соответствующая система (13) следующая: $\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0 \\ 2x_2 + \lambda = 0 \\ 2x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$.

Отсюда находим: $x_{01} = x_{02} = x_{03} = -\frac{1}{3}$; $\lambda_0 = \frac{2}{3}$. Таким образом, $M_0(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};)$ - точка возможного экстремума при $\lambda_0 = \frac{2}{3}$. Дифференцирование условия связи даёт:

$dF = dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$. Второй дифференциал функции Лагранжа, имеет следующий вид: $d^2L(M_0) = 2[(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2]$. Полученная квадратичная форма, очевидно, положительно определена, следовательно, в точке $M_0(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$ имеется условный локальный минимум заданной функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §11.

1) *Подробно напишите второй дифференциал сложной функции $L(x, y, \lambda_0)$ в точке M_0 и объясните, почему он имеет вид (16).*
2) *Найдите координаты всех точек возможных условных локальных экстремумов функции $u = x - 2y + 2z$ при условии: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, не пользуясь методом Лагранжа.*
3) *Пользуясь методом Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $u = x - 2y + 2z$ при условии: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

ЗАДАЧИ К §1.

1.1. Назовем *расстоянием* между множествами A и B в R^n число $dist(A,B)=\inf\{\rho(x,y)|x\in A, y\in B\}$. Привести пример двух замкнутых непересекающихся множеств в R^n, расстояние между которыми равно нулю.

ОТВЕТ: *Например, гипербола* $y^2-x^2=1$ *и ее асимптота* $y=x$.

РЕШЕНИЕ: Очевидно, что множества A и B точек, заданные на плоскости уравнениями соответственно $y^2-x^2=1$ и $y=x$, являются замкнутыми (они содержат все свои граничные точки) и не пересекаются. Покажем, что расстояние между ними равно нулю. Рассмотрим последовательность точек $\{(x_n,y_n)\}=\left\{\left(n,\sqrt{n^2+1}\right)\right\}$, принадлежащих множеству A, и последовательность точек $\{(x'_n,y'_n)\}=\{(n,n)\}$ множества B. Вычислим расстояние между точками этих двух последовательностей, имеющими одинаковые номера:

$$\rho((x_n,y_n),(x'_n,y'_n))=\left|\sqrt{n^2+1}-n\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Значит, $dist(A,B)=\inf\{\rho(x,y)|x\in A, y\in B\}=0$.

1.2. Определить область существования функции $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

ОТВЕТ: $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ y\ge 1\end{cases}$ *или* $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ y\le -1\end{cases}$.

РЕШЕНИЕ: Поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательным, то получаем следующие условия на переменные (x,y): $\begin{cases} x^2 \le 1 \\ y^2 \ge 1 \end{cases}$, то есть имеем две полуполосы:

$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ y \ge 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ y \le -1 \end{cases}$.

1.3. Исследовать характер поверхности, задаваемой уравнением $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$.

ОТВЕТ: *Поверхность вращения кривой* $z = f(x), y = 0$, *вокруг оси* Oz.

РЕШЕНИЕ: Зафиксируем значение $z = z_0$ и рассмотрим кривую $f(\sqrt{x^2+y^2}) = z_0$. Очевидно, что она представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом $f^{-1}(z_0)$. Так как в сечении плоскостью Oxz поверхности $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ мы имеем кривую $z = f(x)$, то ее можно рассматривать как поверхность вращения кривой $z = f(x), y = 0$, вокруг оси Oz (или поверхность вращения кривой $z = f(y), x = 0$, вокруг Oz).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

1.4. Доказать, что любое открытое множество в R^2 есть объединение конечного или счетного числа открытых кругов.

1.5. Привести пример двух непересекающихся ограниченных множеств в R^n, расстояние между которыми равно нулю.

1.6. Исследовать характер поверхности, задаваемой уравнением $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

1.4. ***Указание:*** *представить открытое множество* G *в виде счетного объединения ограниченных открытых множеств* G_n, *а каждое из* G_n *в виде* $G_n = \bigcup\limits_k G_{n,k}$, *где* $G_{n,k}$ *- множество тех* $x \in G_n$, *для которых расстояние до границы* G_n *больше, чем* $\frac{1}{k}$;

1.5. *Например,*

$$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\},\ B = \{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 < 1\}$$

1.6. *Коноид с направляющей:* $x = 1, z = f(y)$, *образующие которого параллельны плоскости* Oxy.

ЗАДАЧИ К §2.

2.1. Найти поверхности уровня функции $f(x,y,z)=x+y+z$ (*поверхностью уровня* C функции $f(x,y,z)$ называется множество точек (x,y,z) таких, что $f(x,y,z)=C$).

ОТВЕТ: *плоскости вида* $x+y+z=C$.

РЕШЕНИЕ: Напишем уравнение произвольной поверхности уровня: $x+y+z=C$. Это уравнение задает плоскость, проходящую через три точки: $(C,0,0)$, $(0,C,0)$ и $(0,0,C)$ (в случае, когда $C=0$, - через начало координат и, например, точки $(1,-1,0)$ и $(0,1,-1)$).

2.2. Найти $f(x,y)$, если $f\left(x+y,\dfrac{x}{y}\right)=x^2-y^2$.

ОТВЕТ: $f(x,y)=\dfrac{x^2(y-1)}{y+1}$.

РЕШЕНИЕ: Обозначим $x+y=t$, $\dfrac{x}{y}=u$. Тогда $x=\dfrac{tu}{u+1}$, $y=\dfrac{t}{u+1}$. Значит, $f(t,u)=\dfrac{t^2u^2}{(u+1)^2}-\dfrac{t^2}{(u+1)^2}=\dfrac{t^2(u-1)}{u+1}$.

2.3. Показать, что для функции

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

имеем: $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$,

но $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ **не существует.**

РЕШЕНИЕ: Действительно,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{0+y^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{0+x^2} = 0.$$

Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует. Рассмотрим последовательность $\{(x_n,y_n)\} = \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$. Получим, что $\{(x_n,y_n)\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\{(0,0)\}$, $f(x_n,y_n) = \frac{n^2}{n^2} \equiv 1$.

Теперь рассмотрим последовательность $\{(x'_n,y'_n)\} = \left\{\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\right\}$. Получаем: $\{(x'_n,y'_n)\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\{(0,0)\}$, но $f(x'_n,y'_n) = \frac{n^2}{5n^2} \equiv \frac{1}{5}$. В силу определения предела функции по Гейне, это означает, что не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

2.4. Вычислить: а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

а) ОТВЕТ: 0.

РЕШЕНИЕ: Разделим числитель и знаменатель дроби на отличное от нуля выражение xy. Получим дробь $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}$.

Пусть сначала x и y одного знака. Тогда $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, значит, знаменатель последней дроби больше или равен единицы, а числитель, очевидно, стремится к нулю при $x\to\infty$, $y\to\infty$.

Если x и y разных знаков, то $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq -2$, поэтому знаменатель дроби меньше или равен минус трем. Аналогично получаем, что вся дробь стремится к нулю.

б) ОТВЕТ: 0.

РЕШЕНИЕ: Сделаем замену $x+y=t$. Так как x и y - положительные числа, то $x^2+y^2<(x+y)^2$, следовательно, $0\leq(x^2+y^2)e^{-(x+y)}<t^2e^{-t}$. Так как $t^2e^{-t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$, то из последнего неравенства заключаем, что $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

2.5. Найти поверхности уровня функции

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2.$$

2.6. Пусть $z=x+y-f(x-y)$. Найти функции f и z, если $z=x^2$ при $y=0$.

2.7. Показать, что для функции $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x+y}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$

имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=-1$, а $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ не существует.

2.8. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$?

2.9. Чему равен предел функции $f(x,y)=x^2e^{-(x^2-y)}$ вдоль любого луча $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$ $(0\le t<+\infty)$ при $t\to+\infty$? Можно ли назвать эту функцию бесконечно малой при $x\to\infty$ и $y\to\infty$?

2.10. Вычислить: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

ОТВЕТЫ.

2.5. *Семейство двуполостных гиперболоидов, либо семейство однополостных гиперболоидов, либо конус.*

2.6. $f(x)=x-x^2$, $z=2y+(x-y)^2$.

2.8. *Не существует.*

2.9. 0; *нельзя.*

2.10. **а)** a **б)** 1.

ЗАДАЧИ К § 3.

3.1. Найти точки разрыва функции $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$.

ОТВЕТ: *прямая* $x=-y$.

РЕШЕНИЕ: Если знаменатель дроби не обращается в ноль, то функция $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ непрерывна как композиция непрерывных функций. В точках прямой $x=-y$ функция не определена, следовательно, разрывна (заметим, что она не имеет конечного предела ни в одной точке указанной прямой, в том числе и в начале координат).

3.2. Исследовать на непрерывность по каждой переменной и по совокупности функцию:

а) $f(x,y)=\sqrt[3]{\dfrac{x(x-y)}{x^2+xy+y^2}}$, $f(0,0)=0$;

б) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2+\sin^2 x}, & y^2+\sin^2 x\neq 0\\ 0, & y^2+\sin^2 x=0\end{cases}$.

а) ОТВЕТ: *непрерывна по переменной* y *всюду; непрерывна по переменной* x *всюду, кроме точки* $(0,0)$; *разрывна в начале координат и непрерывна во всех остальных точках как функция двух переменных.*

РЕШЕНИЕ: Очевидно, что всюду, кроме точки $(0,0)$ функция непрерывна по совокупности переменных и по каждой переменной в отдельности (как композиция непрерывных функций).

Рассмотрим начало координат. Исследуем функцию на непрерывность по каждой из переменных. Положим сначала $x=0$. Тогда $f(0,y)\equiv 0$, тем более, $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0)$.

Значит, функция $f(x,y)$ непрерывна по переменной y в точке $(0,0)$.

Пусть теперь $y=0$. Тогда $f(x,0)\equiv 1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=1\neq f(0,0)$. Таким образом, функция $f(x,y)$ разрывна по переменной x в точке $(0,0)$.

Поскольку $f(x,y)$ разрывна в точке $(0,0)$ по одной из переменных, то она разрывна в этой точке и как функция двух переменных (так как из непрерывности по совокупности переменных следует непрерывность по каждой переменной в отдельности).

б) ОТВЕТ: *непрерывна по каждой переменной и по совокупности во всех точках, кроме точек вида* $(\pi k,0)$, $k\in Z$; *в точке* $(0,0)$ *непрерывна по переменной* y, *разрывна по* x *и по совокупности переменных; в точках вида* $(\pi k,0)$, $k\in Z$, $k\neq 0$, *разрывна по каждой из переменных и по совокупности.*

РЕШЕНИЕ: Всюду, кроме точек вида $(\pi k,0)$, $k\in Z$, функция непрерывна по совокупности переменных и по каждой переменной в отдельности (как композиция непрерывных функций).

Рассмотрим начало координат. Исследуем на непрерывность по каждой из переменных. Положим сначала $x=0$. Тогда $f(0,y)\equiv 0$, тем более, $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0)$.

Значит, функция $f(x,y)$ непрерывна по переменной y в точке $(0,0)$. Пусть теперь $y=0$. Тогда $f(x,0)=\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=1\neq f(0,0)$. Таким образом, функция $f(x,y)$ разрывна и по переменной x, и как функция двух переменных, в точке $(0,0)$.

Теперь рассмотрим точку вида $(\pi k,0)$, $k \in Z$, $k \neq 0$. Если положить $y=0$, то $\lim\limits_{x\to\pi k} f(x,0)=+\infty$, то есть $f(x,y)$ разрывна по переменной x во всех точках такого типа. Покажем, что она разрывна в этих точках и по переменной y. Действительно, $f(\pi k,y)=\dfrac{\pi^2 k^2}{y^2}\xrightarrow[y\to 0]{}+\infty$. Тем более, функция разрывна в каждой точке вида $(\pi k,0)$, $k \in Z$, $k \neq 0$ по совокупности переменных.

3.3. Доказать, что если функция $f(x,y)$ в некоторой области G непрерывна по переменной x и равномерно относительно x непрерывна по переменной y, то эта функция непрерывна в рассматриваемой области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Пусть точка (x_0,y_0) принадлежит области G. Нам нужно доказать, что существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любой точки $(x,y)\in G$, удовлетворяющей условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, выполнено:

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

Так как $f(x,y)$ непрерывна по переменной x в области G, то существует число $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ такое, что

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2$$

для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta_1$.

С другой стороны, $f(x,y)$ равномерно относительно x непрерывна по переменной y в области G, значит, существует число $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ такое, что для любого x выполнено:

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon/2,$$

как только $|y-y_0|<\delta_2$.

Пусть $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда для любой точки $(x,y)\in G$ такой, что $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, верно:

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+$$
$$+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

3.4. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x,y)\in R^2\ |0<x^2+y^2<1\}$ функцию:

а) $f(x,y)=(x^2+y^2)^\lambda\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$; **б)** $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}\ln(x^2+y^2)$.

а) ОТВЕТ: *равномерно непрерывна при* $\lambda>0$.

РЕШЕНИЕ: Пусть сначала $\lambda>0$. Положим $f(0,0)=0$. Тогда функция $f(x,y)$ будет непрерывна на замкнутом ограниченном множестве: $\{(x,y)\in R^2\ |0\le x^2+y^2\le 1\}$, следовательно, равномерно непрерывна на нем (теорема Кантора). Значит, она будет равномерно непрерывна и на меньшем множестве: $\{(x,y)\in R^2\ |0<x^2+y^2<1\}$.

Рассмотрим теперь случай $\lambda\le 0$. Выберем две последовательности точек, расстояние между которыми стремится к нулю:

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},0\right)\text{ и }(x_n',y_n')=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi/2+2\pi n}},0\right).$$

Очевидно, что для любого $\delta > 0$ найдется номер N достаточно большой, чтобы было выполнено: $\sqrt{(x_n - x'_n)^2 + (y_n - y'_n)^2} < \delta$ для любого $n > N$.

С другой стороны,

$$|f(x_n, y_n) - f(x'_n, y'_n)| = (\pi/2 + 2\pi n)^{-\lambda} \geq 1$$

при $\lambda \leq 0$. Значит, в этом случае функция $f(x, y)$ не будет равномерно непрерывна ни в какой окрестности начала координат.

б) ОТВЕТ: *равномерно непрерывна.*

РЕШЕНИЕ: Положим $f(0,0) = 0$ и покажем, что доопределенная таким способом функция будет непрерывна в начале координат. Действительно, так как

$$\left|\sqrt[3]{xy}\right| \leq \sqrt[3]{\frac{x^2 + y^2}{2}},$$

то $|f(x, y)| \leq \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + y^2}{2}} \ln(x^2 + y^2) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ y \to 0}]{} 0$.

Значит, функция $f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \ln(x^2 + y^2)$ непрерывна в замкнутом единичном круге. Тогда, согласно теореме Кантора, она равномерно непрерывна в нем, а значит, и в указанной области.

3.5. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \geq a^2\}$ и существует $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y) = b$. Доказать, что тогда $f(x, y)$ равномерно непрерывна в указанной области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y) = b$, то найдется такое число $A > a$, что $|f(x,y)-b| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любой точки (x,y), для которой $x^2+y^2 > A^2$.

Представим область D в виде объединения: $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \{(x,y)\in R^2 \,|\, a^2 \le x^2+y^2 \le (A+1)^2\}$, $D_2 = \{(x,y)\in R^2 \,|\, x^2+y^2 \ge A^2\}$. Тогда для любых точек (x',y'), $(x'',y'')\in D_2$ выполнено:

$$|f(x',y')-f(x'',y'')| \le |f(x',y')-b| +$$
$$+|f(x'',y'')-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

С другой стороны, D_1 - ограниченное замкнутое множество. Функция $f(x,y)$ непрерывна на этом множестве, следовательно, равномерно непрерывна на нем. Значит, найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых точек (x',y'), $(x'',y'')\in D_1$, расстояние между которыми меньше, чем δ, справедливо неравенство:

$$|f(x',y')-f(x'',y'')| < \varepsilon.$$

Возьмем $\delta_1 = \min\{\delta, 1/2\}$. Тогда для любых точек (x',y'), $(x'',y'')\in D$, расстояние между которыми меньше, чем δ_1, получим: $|f(x',y')-f(x'',y'')| < \varepsilon$ (так как эти точки будут одновременно принадлежать либо компоненте D_1, либо D_2). Это означает, что наша функция равномерно непрерывна на множестве D.

3.6. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\ge 1\}$ функцию

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

ОТВЕТ: *равномерно непрерывна.*

РЕШЕНИЕ: Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Покажем, что данная функция имеет конечный предел при $x\to\infty, y\to\infty$. Действительно, если $x^2+y^2\ge 1$,

то $|f(x,y)|\le\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{x^2+y^2}$. Но $\sqrt[3]{x^2y^2}\le\sqrt[3]{\dfrac{x^4+y^4}{2}}\le\left(\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Значит, $|f(x,y)|\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{2(x^2+y^2)}}$, то есть $f(x,y)\xrightarrow[\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}]{}0$.

В силу доказанного выше это означает, что функция $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ равномерно непрерывна на множестве $\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\ge 1\}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

3.7. Найти точки разрыва функции $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$.

3.8. Доказать, что если функция $f(x,y)$ в некоторой области G непрерывна по переменной x и удовлетворяет условию Липшица по переменной y (т.е. существует постоянная $C>0$ такая, что $|f(x,y')-f(x,y'')|\le C|y'-y''|$, если $(x,y')\in G$ и $(x,y'')\in G$), то эта функция непрерывна в рассматриваемой области.

3.9. Доказать, что если функция $f(x,y)$ в некоторой области G непрерывна по каждой из переменных x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то $f(x,y)$ непрерывна в области G по совокупности переменных.

3.10. Привести пример функции $f(x,y)$, разрывной в квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$, строго монотонной по каждой переменной и непрерывной по одной из них (при фиксированной другой).

3.11. Привести пример функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$, каждая из которых является разрывной в точке $(0,0)$ и таких, что: а) их сумма есть функция, непрерывная в точке $(0,0)$; б) их произведение есть функция, непрерывная в точке $(0,0)$.

3.12. Исследовать на непрерывность по каждой переменной и по совокупности функцию

$$f(x,y)=\sqrt[4]{\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^4+y^4}},\quad f(0,0)=0.$$

3.13. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x,y)\in R^2\ |0<x^2+y^2<1\}$ функцию:

а) $f(x,y)=arctg\sqrt{x^2+y^4}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

б) $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}$.

3.14. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x,y)\in R^2\ |x^2+y^2\geq 1\}$ функцию:

а) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\lambda}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

б) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}\,arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

ОТВЕТЫ.

3.7. *Все точки вида* $(\pi n, y)$ *и* $(x,\pi n)$, $n\in Z$.

3.10. *Например,* $f(x,y)=x+y+\operatorname{sgn} y$.

3.11. **а)** *Например,* $f(x,y)=\operatorname{sgn}(xy)$; $g(x,y)=xy-\operatorname{sgn}(xy)$; **б)** *например,* $f(x,y)=\operatorname{sgn}(xy)$; $g(x,y)=xy$.

3.12. *Непрерывна всюду, кроме точки* $(0,0)$; *в точке* $(0,0)$ *непрерывна по* y; *разрывна по* x *и по совокупности.*

3.13. **а)** *Равномерно непрерывна;* **б)** *равномерно непрерывна.*

3.14. **а)** *Равномерно непрерывна при* $\lambda\le\dfrac{3}{2}$; **б)** *равномерно непрерывна.*

ЗАДАЧИ К § 4.

4.1. Найти частные производные по каждой из переменных функции $f(x,y,z)=e^{x^y}+e^{y^z}+e^{xyz}$.

ОТВЕТ: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{x^y}yx^{y-1}+e^{xyz}yz$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{x^y}x^y\ln x+e^{y^z}zy^{z-1}+e^{xyz}xz$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}=e^{y^z}y^z\ln y+e^{xyz}xy$.

РЕШЕНИЕ: По правилу вычисления частных производных имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x^y}(x^y)'_x+0+e^{xyz}(xyz)'_x=e^{x^y}yx^{y-1}+e^{xyz}yz;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x^y}(x^y)'_y+e^{y^z}(y^z)'_y+e^{xyz}(xyz)'_y=e^{x^y}x^y\ln x+$$

$$+e^{y^z}zy^{z-1}+e^{xyz}xz;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0+e^{y^z}(y^z)'_z+e^{xyz}(xyz)'_z=e^{y^z}y^z\ln y+e^{xyz}xy.$$

4.2. Найти первый дифференциал функции $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)+\ln(xyz^2)$.

ОТВЕТ: $df=\cos(x+y+z)(dx+dy+dz)+\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}+\dfrac{2dz}{z}$.

РЕШЕНИЕ: Вычислим сначала все частные производные первого порядка функции $f(x,y,z)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos(x+y+z)+\dfrac{1}{x}$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\cos(x+y+z)+\dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos(x+y+z)+\dfrac{2}{z}$.

Поскольку первый дифференциал имеет вид $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$, то получаем, что в данном случае

$$df = \cos(x+y+z)(dx+dy+dz) + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{2dz}{z}.$$

4.3. Найти $f'_x(x,1)$, если $f(x,y) = xy + (y-1)\sqrt[3]{\sin(xy)}$.

ОТВЕТ: 1 .

РЕШЕНИЕ: *1-й способ.* Вычислим $f'_x(x,y)$:

$$f'_x(x,y) = y + (y-1)\frac{1}{3}(\sin(xy))^{-\frac{2}{3}}\cos(xy)y.$$

Положив в последнем выражении $y=1$, получим

$$f'_x(x,1) = 1.$$

2-й способ. Найдем сначала $f(x,1)$: $f(x,1) = x + 0 = x$. Вычислим теперь производную полученной функции: $f'_x(x,1) = x' = 1$. Как мы видим, и в том, и в другом случае ответ получается один и тот же.

4.4. Показать, что функция $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ непрерывна в точке $(0,0)$, имеет в этой точке частные производные по каждой из переменных, но не является дифференцируемой.

РЕШЕНИЕ: Очевидно, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt[3]{xy} = 0 = f(0,0)$

Значит, функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$. Вычислим ее частные производные в этой точке. По определению имеем:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0;$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.$$

Исследуем функцию на дифференцируемость. Для этого необходимо проверить, можно ли приращение данной функции в точке $(0,0)$ представить в виде

$f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})$ при $(x,y)\to(0,0)$. В нашем случае последняя формула будет иметь вид $\sqrt[3]{xy}=o(\sqrt{x^2+y^2})$. Проверим, справедливо ли данное утверждение. Для этого рассмотрим предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Покажем, что он не равен нулю.

Действительно, рассмотрим последовательность аргументов $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, что $(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$. Однако последовательность соответствующих значений функции

$$\frac{\sqrt[3]{x_ny_n}}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\frac{n}{\sqrt{2}n^{2/3}}=\frac{n^{1/3}}{\sqrt{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

Значит, по определению Гейне, конечного предела $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не существует. Следовательно, он никак не может равняться нулю. Таким образом, $\sqrt[3]{xy}\neq o(\sqrt{x^2+y^2})$ $(x,y)\to(0,0)$, то есть функция $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

4.5. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

дифференцируема в точке $(0,0)$, но ее частные производные являются разрывными в этой точке.

РЕШЕНИЕ: Вычислим сначала частные производные функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$:

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/|x|)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{|x|}=0$$

. Аналогично $f'_y(0,0)=0$. Исследуем функцию на дифференцируемость в начале координат. Для этого выпишем ее приращение в данной точке: $f(x,y)-f(0,0)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Рассмотрим предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и покажем, что он равен нулю.

Действительно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ как предел произведения бесконечно малой функции на ограниченную.

Покажем теперь, что частная производная $f'_x(x,y)$ разрывна в точке $(0,0)$ (для $f'_y(x,y)$ рассуждения проводятся аналогично). Вычислим $f'_x(x,y)$ при $x^2+y^2\neq 0$:

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}2x=$$

$$=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Покажем, что не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x(x,y)$.

Действительно, выражение $2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ стремится к нулю при $(x,y)\to(0,0)$ (как произведение бесконечно малой функции на ограниченную). Второе слагаемое в выражении для частной производной: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$. Чтобы доказать это, рассмотрим последовательность $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Получим, что $(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$, однако

$$\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{n}{\sqrt{2}}$$

не имеет предела при $n\to\infty$. Значит, согласно определению непрерывности функции по Гейне, функция $f'_x(x,y)$ не является непрерывной в точке $(0,0)$.

4.6. Следует ли из условия $f(x,y)-f(0,0)=o(\sqrt{x^2+y^2})$, $x^2+y^2\to 0$, дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$?

ОТВЕТ: *да.*

РЕШЕНИЕ: Согласно определению, функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$, если ее приращение в этой точке представляется в виде:

$f(x,y)-f(0,0)=A_1x+A_2y+o(\sqrt{x^2+y^2})$, $x^2+y^2\to 0$, где постоянные A_1,A_2 не зависят от приращений аргументов. В нашем случае это условие выполнено с постоянными

$A_1 = A_2 = 0$. Значит, функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$, причем $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

4.7. Найти частные производные по переменным x, y и z первого порядка сложной функции $f(x, xy, z^2)$.

ОТВЕТ: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1' + f_2' y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = f_2' x$; $\frac{\partial f}{\partial z} = f_3' 2z$.

РЕШЕНИЕ: Вычислим производные по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1' x_x' + f_2'(xy)_x' + f_3'(z^2)_x' = f_1' + f_2' y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_1' x_y' + f_2'(xy)_y' + f_3'(z^2)_y' = f_2' x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_1' x_z' + f_2'(xy)_z' + f_3'(z^2)_z' = f_3' 2z$$

(здесь и далее выражения f_k', $k = 1,2,3$, означают частные производные функции $f(x, xy, z^2)$ по первому, второму и третьему аргументам соответственно).

4.8. Найти дифференциал первого порядка сложной функции $f(x+y, y-z)$.

ОТВЕТ: $df = f_1'(dx + dy) + f_2'(dy - dz)$.

РЕШЕНИЕ: Вычислим сначала все частные производные по переменным x, y первого порядка данной сложной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1'(x+y)_x' + f_2'(y-z)_x' = f_1';$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_1'(x+y)_y' + f_2'(y-z)_y' = f_1' + f_2';$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_1'(x+y)_z' + f_2'(y-z)_z' = -f_2'.$$

Таким образом,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = f_1'(dx+dy) + f_2'(dy-dz).$$

4.9. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $f = x^2 + y^2$ в точке $M(1,2,5)$.

ОТВЕТ: *уравнение касательной плоскости:*

$$2x + 4y - z - 5 = 0;$$

уравнение нормали: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

РЕШЕНИЕ: Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0) имеет вид: $f_x'(x_0;y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0;y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$. В нашем случае

$$f_x'(x_0;y_0) = 2x_0 = 2;\ f_y'(x_0;y_0) = 2y_0 = 4,$$

следовательно, уравнение касательной плоскости выглядит следующим образом: $2x + 4y - z - 5 = 0$.

Уравнение нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0): $\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$. В нашем случае уравнение нормали имеет вид: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

4.10. Найти частные производные по каждой из переменных функции:

а) $f(x,y,z) = arctg\frac{xz+y}{1-xy}$; б) $f(x,y) = \cos(e^x y)$.

4.11. Найти первый дифференциал функции:

а) $f(x,y,z)=\ln(xyz)$; б) $f(x,y,z)=arctg\dfrac{xy}{z}$.

4.12. Является ли функция $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ дифференцируемой в точке $(0,0)$?

4.13. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

непрерывна в любой окрестности точки $(0,0)$ и имеет в этой окрестности ограниченные частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, но не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

4.14. Найти все частные производные первого порядка по переменным x,y и z сложной функции

а) $f(x^2+y^2,xy)$; б) $f(x+z^2,y+x^2,z+y^2)$.

4.15. Найти первый дифференциал сложной функции

а) $f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$; б) $f(xe^z,ye^z,ze^{x-y})$.

4.16. Написать уравнения касательных плоскостей и нормалей к следующим поверхностям в заданной точке $M(x_0,y_0,z_0)$:

а) $x^2y^3-xy^2=z+\dfrac{3}{8}$, $M=\left(2,\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{8}\right)$;

б) $x^8+y^{13}+5z=7$, $M=(1,1,1)$.

ОТВЕТЫ.

4.10. а) $f'_x = \dfrac{z+y^2}{A}$, $f'_y = \dfrac{1+x^2z}{A}$, $f'_z = \dfrac{x-x^2y}{A}$, *где*

$$A = 1 - 2xy + x^2y^2 + 2xyz + y^2 + x^2z^2.$$

б) $f'_x = -\sin(e^x y)e^x y$, $f'_y = -\sin(e^x y)e^x$.

4.11. а) $df = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} + \dfrac{dz}{z}$.

б) $df = \dfrac{z^2}{z^2 + x^2y^2}\left(\dfrac{y}{z}dx + \dfrac{x}{z}dy - \dfrac{xy}{z^2}dz\right)$.

4.12. *Нет.*

4.14. а) $f'_x = f'_1 2x + f'_2 y$, $f'_y = f'_1 2y + f'_2 x$.

б) $f'_x = f'_1 + f'_2 2x$, $f'_y = f'_2 + f'_3 2y$, $f'_z = f'_1 2z + f'_3$.

4.15. а) $df = \left(f'_1 y + \dfrac{f'_2}{y}\right)dx + \left(f'_1 x - f'_2 \dfrac{x}{y^2}\right)dy$.

б)
$$df = \left(f'_1 e^z + f'_3 z e^{x-y}\right)dx +$$
$$+ \left(f'_2 e^z - f'_3 z e^{x-y}\right)dy + \left(f'_1 x e^z + f'_2 y e^z + f'_3 e^{x-y}\right)dz.$$

4.16. а) $x + 4y - 4z - \dfrac{11}{2} = 0$; $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1/2}{4} = \dfrac{z+3/8}{-4}$;

б) $8x + 13y + 5z - 26 = 0$; $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-1}{13} = \dfrac{z-1}{5}$.

ЗАДАЧИ К § 5.

5.1. Найти указанные частные производные:

а) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, **если** $f(x,y) = x\ln(xy)$;

б) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$, **если** $f(x,y) = x^4 y + xy^3 + 2x^2 y^2$;

в) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}$, **если** $f(x,y,z) = xye^z + xze^y + yze^x$.

а) ОТВЕТ: 0.

РЕШЕНИЕ: По правилу вычисления частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{x}{xy} = \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}.$$

Значит, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y} = \left(\dfrac{1}{y}\right)'_x = 0$.

б) ОТВЕТ: 8.

РЕШЕНИЕ:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(x^4 + 3xy^2 + 4x^2 y\right) =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(6xy + 4x^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6y + 8x) = 8.$$

в) ОТВЕТ: $e^z + e^y + e^x$.

РЕШЕНИЕ:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(xe^z + xze^y + ze^x\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^z + ze^y + ze^x\right) = e^z + e^y + e^x$$

5.2. Найти полные дифференциалы указанных порядков:

а) $d^2 f$, **если** $f(x,y,z) = e^{xyz}$;

б) $d^3 f$, **если** $f(x,y) = x^3 y + y^4$.

а) ОТВЕТ: $e^{xyz}((yz)^2dx^2+(xz)^2dy^2+(xy)^2dz^2+$
$+2(z+xyz^2)dxdy+2(y+xzy^2)dxdz+2(x+yzx^2)dydz)$.

РЕШЕНИЕ: Вычислим сначала все частные производные второго порядка функции e^{xyz}: $f''_{xx}=(yz)^2e^{xyz}$; $f''_{yy}=(xz)^2e^{xyz}$; $f''_{zz}=(xy)^2e^{xyz}$; $f''_{xy}=(z+xyz^2)e^{xyz}$; $f''_{xz}=(y+xzy^2)e^{xyz}$; $f''_{yz}=(x+yzx^2)e^{xyz}$ (в данном случае значения смешанных частных производных не зависят от порядка дифференцирования). Так как дифференциал второго порядка функции трех переменных имеет вид:

$$d^2f(x,y,z)=f''_{xx}dx^2+f''_{yy}dy^2+f''_{zz}dz^2+$$
$$+2f''_{xy}dxdy+2f''_{xz}dxdz+2f''_{yz}dydz,$$

то в данном случае получаем:

$$d^2\left(e^{xyz}\right)=e^{xyz}((yz)^2dx^2+(xz)^2dy^2+(xy)^2dz^2+$$
$$+2(z+xyz^2)dxdy+2(y+xzy^2)dxdz+2(x+yzx^2)dydz).$$

б) ОТВЕТ: $6y\left(dx^3+4dy^3\right)+18xdx^2dy$.

РЕШЕНИЕ: Вычислим все частные производные данной функции третьего порядка: $f'''_{xxx}=6y$; $f'''_{yyy}=24y$; $f'''_{xxy}=6x$; $f'''_{xyy}=0$ (значения смешанных частных производных здесь не зависят от порядка дифференцирования). Так как дифференциал третьего порядка вычисляется по формуле

$$d^3f(x,y)=f'''_{xxx}dx^3+f'''_{yyy}dy^3+3f'''_{xxy}dx^2dy+3f'''_{xyy}dxdy^2,$$

то

$$d^3\left(x^3y+y^4\right)=6y\left(dx^3+4dy^3\right)+18xdx^2dy.$$

5.3. Найти $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ **сложной функции** $f(xy,x+y)$.

ОТВЕТ: $f''_{11}xy+f''_{12}x+f'_1+f''_{21}y+f''_{22}$

РЕШЕНИЕ: По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1' x+f_2'\right)=f_{11}'' xy+f_{12}'' x+f_1'+f_{21}'' y+f_{22}''.$$

(Символом f_k' здесь и далее обозначается первая производная функции f по k-тому аргументу; символом f_{kj}'' - вторая производная, взятая сначала по k-тому, а затем – по j-тому аргументам и т.д.).

5.4. Найти полный дифференциал второго порядка сложной функции $f(xy, y^2+z^2)$.

ОТВЕТ: $\left(f_{11}'' y^2\right)dx^2+\left(f_{11}'' x^2+f_{12}'' 4xy+f_{22}'' 4y^2+2f_2'\right)dy^2+$

$$+\left(f_{22}'' 4z^2+f_2' 2\right)dz^2+\left(f_{12}'' 4yz\right)dxdz+$$

$$+2\left(f_{11}'' xy+f_{12}'' 2y^2+f_1'\right)dxdy+2\left(f_{12}'' 2xz+f_{22}'' 4yz\right)dydz.$$

РЕШЕНИЕ: Будем считать для простоты, что функция f является дважды дифференцируемой (тогда значения смешанных производных не зависят от порядка дифференцирования). Вычислим все производные второго порядка данной функции:

$$f_{xx}''=\left(f_1' y\right)_x'=f_{11}'' y^2;$$

$$f_{yy}''=\left(f_1' x+f_2' 2y\right)_y'=f_{11}'' x^2+f_{12}'' 4xy+f_{22}'' 4y^2+2f_2';$$

$$f_{zz}''=f_{22}'' 4z^2+2f_2';\ f_{xy}''=\left(f_1' y\right)_y'=f_{11}'' xy+f_{12}'' 2y^2+f_1';$$

$$f_{xz}''=\left(f_1' y\right)_z'=f_{12}'' 2yz;$$

$$f_{yz}''=\left(f_1' x+f_2' 2y\right)_z'=f_{12}'' 2xz+f_{22}'' 4yz.$$

Тогда

$$d^2 f=\left(f_{11}'' y^2\right)dx^2+\left(f_{11}'' x^2+f_{12}'' 4xy+f_{22}'' 4y^2+2f_2'\right)dy^2+$$

$$+\left(f''_{22}4z^2+f'_2 2\right)dz^2+\left(f''_{12}4yz\right)dxdz+$$
$$+2\left(f''_{11}xy+f''_{12}2y^2+f'_1\right)dxdy+2\left(f''_{12}2xz+f''_{22}4yz\right)dydz.$$

5.5. Найти производную функции $f(x,y)=xy^2+\sin(xy)$ в точке $M(1,\pi/2)$ в направлении, составляющем угол $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ с положительным направлением оси Ox.

ОТВЕТ: $\dfrac{\pi^2\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\pi}{2}$.

РЕШЕНИЕ: Так как данная функция дифференцируема в любой точке, то ее производную в направлении $\vec{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ можно вычислить по формуле:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_M=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M\sin\alpha=\left.(y^2+y\cos(xy))\right|_M\frac{\sqrt{3}}{2}+$$
$$+\left.(2xy+x\cos(xy))\right|_M\frac{1}{2}=\frac{\pi^2\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{2}.$$

5.6. Найти производную функции $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M(0,e)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

ОТВЕТ: $\dfrac{2}{e}$.

РЕШЕНИЕ: Так как направление, перпендикулярное линии уровня, совпадает с направлением вектора градиента (см. лемму 2 § 5), то нам нужно найти градиент функции $f(x,y)$ в точке $M(0,e)$. Кроме того, из леммы 1 того же параграфа следует, что производная по направлению, задаваемому вектором $grad\,f$, равна его норме, т.е. $\|grad\,f\|$. В данном случае $grad\, f|_M = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)\Big|_M = \left(0, \frac{2}{e}\right)$. Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_M = \|grad\, f\|_M = \frac{2}{e}$.

5.7. Показать, что в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ угол между градиентами функций $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ и $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z$ стремится к нулю, если $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} \to \infty$.

РЕШЕНИЕ: Найдем вид градиентов функций f и g в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$grad\, f|_M = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_M, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_M, \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_M\right) = (2x_0, 2y_0, 2z_0);$$

$$grad\, g|_M = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_M, \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_M, \frac{\partial g}{\partial z}\Big|_M\right) = (2x_0+2,\ 2y_0+2,\ 2z_0+2).$$

Найдем угол α_M между этими векторами:

$$\cos\alpha_M = \frac{4x_0(x_0+1)+4y_0(y_0+1)+4z_0(z_0+1)}{4\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\sqrt{(x_0+1)^2+(y_0+1)^2+(z_0+1)^2}}.$$

Перейдем в последнем выражении к сферическим координатам: $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$. Тогда $x^2+y^2+z^2 = r^2$ и нам нужно вычислить следующий предел

$$\lim_{r\to\infty}\cos\alpha_M = \lim_{r\to\infty}\frac{4r^2\left(1+(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\cos\psi+\sin\psi)/r\right)}{4r^2\sqrt{1+2(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\cos\psi+\sin\psi)/r+3/r^2}}.$$

Так как функции $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\sin\varphi$, $\sin\psi$ являются ограниченными, то данный предел равен 1 при любом выборе φ и ψ. Это означает, что $\cos\alpha_M \to 1$, когда точка M стремится к бесконечности, т.е. $\alpha_M \to 0$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

5.8. Найти указанные частные производные:

а) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, если $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y}$;

б) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$, если $f(x,y) = \ln(1+2x+3y)$;

в) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}$, если $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$.

5.9. Найти полные дифференциалы указанных порядков:

а) $d^2 f$, если $f(x,y,z) = arctg\dfrac{xy}{z}$;

б) $d^3 f$, если $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3y^2x$.

5.10. Найти указанные частные производные сложных функций: а) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, если $f = f\left(\dfrac{x^2}{y}, \dfrac{y^2}{x}\right)$;

б) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, если $f = f(xy, x-y, x+y)$.

5.11. Найти полный дифференциал второго порядка сложной функции $F(x,y,z) = f(xy, yz)$.

5.12. Найти производную функции $f(x,y) = x - x^2y + y^4$ в точке $A(1,1)$ по направлению вектора AB, где $B(4,-2)$.

5.13. Найти производную функции $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M\left(\frac{a}{8},\frac{3\sqrt{3}a}{8}\right)$ кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ по направлению внутренней нормали к этой кривой.

5.14. Найти производную функции $f(x,y,z)=xy+\frac{z}{y}$ в точке $M(2,1,2)$ по направлению градиента функции $g(x,y,z)=xyz$ в этой точке.

ОТВЕТЫ.

5.8. а) $-\frac{x^2}{y^5}\cos\frac{x}{y}-\frac{4x}{y^4}\sin\frac{x}{y}+\frac{2}{y^3}\cos\frac{x}{y}$;

б) $-\frac{216}{(1+2x+3y)^4}$; в) $8xyze^{x^2+y^2+z^2}$.

5.9. а) $$d^2f=\frac{-2xzy^3}{\left(z^2+x^2y^2\right)^2}dx^2+2\frac{z^3-zy^2x^2}{\left(z^2+x^2y^2\right)^2}dxdy+$$
$$+2\frac{x^2y^3-z^2y}{\left(z^2+x^2y^2\right)^2}dxdz-\frac{2x^3zy}{\left(z^2+x^2y^2\right)^2}dy^2+$$
$$+2\frac{x^3y^2-xz^2}{\left(z^2+x^2y^2\right)^2}dydz+\frac{2zxy}{\left(z^2+x^2y^2\right)^2}dz^2;$$

б) $d^3f=6(dx^3+3dx^2dy+3dy^2dx+dy^3)$.

5.10. а) $-f''_{11}\frac{2x^3}{y^3}+5f''_{12}-f''_{22}\frac{2y^3}{x^3}-f'_1\frac{2x}{y^2}-f'_2\frac{2y}{x^2}$;

б) $f''_{11}y^2+2f''_{12}y+2f''_{13}y+f''_{22}+2f''_{23}+f''_{33}$.

5.11. $$d^2f=f''_{11}y^2dx^2+(f''_{11}x^2+2f''_{12}xz+f''_{22}z^2)dy^2+$$
$$+f''_{22}y^2dz^2+2(f''_{11}xy+f''_{12}yz+f'_1)dxdy+$$
$$+2f''_{12}y^2dxdz+2(f''_{12}xy+f''_{22}zy+f'_2)dydz.$$

5.12. $\frac{-4}{\sqrt{2}}$.

5.13. $\frac{-8\sqrt{3}}{7a}$.

5.14. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

ЗАДАЧИ К § 6.

6.1. Разложить функцию

$$f(x,y)=2x^3+x^2y-4y^2+5xy-7x$$

по формуле Тейлора в окрестности точки $M(2,2)$.

ОТВЕТ: $14+35(x-2)-2(y-2)+14(x-2)^2+9(x-2)(y-2)-$
$$-4(y-2)^2+(x-2)^2(y-2)+2(x-2)^3.$$

РЕШЕНИЕ: Вычислим все производные функции $f(x,y)$ в точке M (поскольку данная функция является многочленом третьего порядка, то все ее производные порядков четвертого и выше равны нулю):

$f'_x\big|_M=(6x^2+2xy+5y-7)\big|_M=35$; $f''_{xx}\big|_M=(12x+2y)\big|_M=28$;

$f''_{xy}\big|_M=(2x+5)\big|_M=9$; $f'''_{xxx}\big|_M=12$; $f'''_{xxy}\big|_M=2$; $f'''_{xyy}\big|_M=0$;

$f'_y\big|_M=(x^2-8y+5x)\big|_M=-2$; $f''_{yy}\big|_M=-8$; $f'''_{yyy}\big|=0$.

Значит, $f(x,y)=f(M)+f'_x(M)(x-2)+f'_y(M)(y-2)+$

$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(M)(x-2)^2+f''_{xy}(M)(x-2)(y-2)+$$

$$+\frac{1}{2}f''_{yy}(M)(y-2)^2+\frac{1}{2}f'''_{xyy}(M)(x-2)(y-2)^2+$$

$$+\frac{1}{2}f'''_{xxy}(M)(x-2)^2(y-2)+\frac{1}{6}f'''_{xxx}(M)(x-2)^3+\frac{1}{6}f'''_{yyy}(y-2)^3=$$

$$=14+35(x-2)-2(y-2)+14(x-2)^2+9(x-2)(y-2)-$$

$$-4(y-2)^2+(x-2)^2(y-2)+2(x-2)^3.$$

6.2. Выписать в разложении функции

$$f(x,y)=x\ln(x^2+y)$$

в окрестности точки $M(\sqrt{e},e)$ **все члены до второго порядка включительно.**

ОТВЕТ:

$$\sqrt{e}(\ln 2+1)+(2+\ln 2)(x-\sqrt{e})+\frac{y-e}{2\sqrt{e}}+\frac{(x-\sqrt{e})^2}{\sqrt{e}}-\frac{(y-e)^2}{8e\sqrt{e}}.$$

РЕШЕНИЕ: Вычислим все производные первого и второго порядка данной функции в точке M:

$$f'_x\big|_M=\left(\ln(x^2+y)+\frac{2x^2}{x^2+y}\right)\Bigg|_M=2+\ln 2;$$

$$f'_y\big|_M=\left(\frac{x}{x^2+y}\right)\Bigg|_M=\frac{1}{2\sqrt{e}};\ f''_{xx}\big|_M=\frac{2x^3+6xy}{(x^2+y)^2}\Bigg|_M=\frac{2}{\sqrt{e}};$$

$$f''_{yy}\big|_M=-\frac{x}{(x^2+y)^2}\Bigg|_M=-\frac{1}{4e\sqrt{e}};\ f''_{xy}\big|_M=\frac{y-x^2}{(x^2+y)^2}\Bigg|_M=0.$$

Отсюда получаем:

$$f(x,y)=f(M)+f'_x(M)(x-\sqrt{e})+f'_y(M)(y-e)+$$

$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(M)(x-\sqrt{e})^2+f''_{xy}(M)(x-\sqrt{e})(y-e)+\frac{1}{2}f''_{yy}(M)(y-e)^2=$$

$$=\sqrt{e}(\ln 2+1)+(2+\ln 2)(x-\sqrt{e})+\frac{y-e}{2\sqrt{e}}+\frac{(x-\sqrt{e})^2}{\sqrt{e}}-\frac{(y-e)^2}{8e\sqrt{e}}$$

6.3. Написать три члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}dt$.

ОТВЕТ: $f(x,y)=1+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{6}x^2y+\ldots$

РЕШЕНИЕ: Найдем частные производные функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ (поскольку интеграл, задающий функцию, является собственным, имеем право дифференцировать под знаком интеграла). Обозначим через $g(x,y)$

подынтегральную функцию и вычислим сначала ее производные: $g(x,y)=(1+x)^{t^2y}$; $g'_x(x,y)=t^2y(1+x)^{t^2y-1}$;

$$g'_y(x,y)=(1+x)^{t^2y}t^2\ln(1+x);$$

$$g''_{xx}(x,y)=t^2y(t^2y-1)(1+x)^{t^2y-2};$$

$$g''_{xy}(x,y)=t^4y(1+x)^{t^2y-1}\ln(1+x)+t^2(1+x)^{t^2y-1};$$

$$g''_{yy}(x,y)=(1+x)^{t^2y}t^4\ln^2(1+x);$$

$$g'''_{xxy}=t^2(t^2y-1)(1+x)^{t^2y-2}+t^4y(1+x)^{t^2y-2}+$$

$$+t^4y(t^2y-1)(1+x)^{t^2y-2}\ln(1+x).$$

Подставим полученные результаты в формулу для вычисления функции $f(x,y)$. Получим

$$f(0,0)=\int_0^1 dt=1;\ f'_x(0,0)=\int_0^1 t^2\cdot 0dt=0;$$

$$f'_y(0,0)=\int_0^1 t^2\ln 1dt=0;\ f''_{xx}(0,0)=\int_0^1 0dt=0;$$

$$f''_{xy}(0,0)=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3};\ f''_{yy}(0,0)=\int_0^1 t^4\cdot\ln^2 1dt=0;$$

$$f'''_{xxy}=\int_0^1(-t^2)dt=-\frac{1}{3}.$$

Таким образом, мы вычислили три первых ненулевых члена разложения функции $f(x,y)$ в ряд Маклорена:

$$f(x,y)=1+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{6}x^2y+\ldots$$

6.4. Разложить по формуле Маклорена до членов 6-го порядка малости:

а) $f(x,y)=\ln(1+x^2)\ln(1+y^2)$;

б) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}\,arctg(x^2-y^2)$.

а) ОТВЕТ: $x^2y^2-\frac{x^4y^2}{2}-\frac{x^2y^4}{2}+o(\rho^6)$

РЕШЕНИЕ: Применим формулы для разложения в ряд Маклорена элементарных функций одной переменной. Получим, что $\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6)$, $x\to 0$;

$\ln(1+y^2)=y^2-\frac{y^4}{2}+\frac{y^6}{3}+o(y^6)$, $y\to 0$. Значит,

$$f(x,y)=\ln(1+x^2)\ln(1+y^2)=x^2y^2-\frac{x^4y^2}{2}-\frac{x^2y^4}{2}+o(\rho^6),$$

$\rho\to 0$, где $\rho\sqrt{x^2+y^2}$.

б) ОТВЕТ:

$$x^2-y^2+x^4-y^4+\frac{x^6}{6}-\frac{y^6}{6}+\frac{3x^4y^2}{2}-\frac{3x^2y^4}{2}+o(\rho^6).$$

РЕШЕНИЕ: Применим формулы для разложения в ряд Маклорена функций e^t и $arctg\,t$:

$$e^{x^2+y^2}=1+x^2+y^2+\frac{(x^2+y^2)^2}{2}+o((x^2+y^2)^2),\ x^2+y^2\to 0;$$

$$arctg(x^2-y^2)=x^2-y^2-\frac{(x^2-y^2)^3}{3}+o((x^2-y^2)^4),$$

$x^2-y^2\to 0$.

Значит,

$$f(x,y)=e^{x^2+y^2}arctg(x^2-y^2)=x^2-y^2+x^4+x^2y^2-x^2y^2-$$

$$-y^4+\frac{x^6}{2}+x^4y^2+\frac{x^2y^4}{2}-\frac{x^4y^2}{2}-x^2y^4-\frac{y^6}{2}-\frac{x^6}{3}+x^4y^2-x^2y^4+$$

$$+\frac{y^6}{3}+o(\rho^6)=x^2-y^2+x^4-y^4+\frac{x^6}{6}-\frac{y^6}{6}+\frac{3x^4y^2}{2}-\frac{3x^2y^4}{2}+o(\rho^6)$$

$\rho\to 0$, где $\rho\sqrt{x^2+y^2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

6.5. Разложить функцию

$$f(x,y,z) = y^2z + x^2y - 4xyz + 3xy + z$$

по формуле Тейлора в окрестности точки $M(1,1,1)$.

6.6. Выписать в разложении функции $f(x,y) = e^{xy}$ в окрестности точки $(1,2)$ все члены до второго порядка включительно.

6.7. Разложить по формуле Маклорена до членов 6-го порядка малости:

а) $f(x,y) = arctg\dfrac{x^2+y^2}{1+xy}$; б) $f(x,y) = \sqrt[3]{\cos(x^2+y^2)}$.

ОТВЕТЫ.

6.5.

$$f(x,y,z) = 2 + (x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) + (x-1)^2 + (y-1)^2 +$$
$$+ (x-1)(y-1) - 4(x-1)(z-1) - 2(y-1)(z-1) + (x-1)^2(y-1) +$$
$$+ (y-1)^2(z-1) - 4(x-1)(y-1)(z-1).$$

6.6.

$$f(x,y) = e^2\left(1 + 2(x-1) + y - 1 + 2(x-1)^2 + 3(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 + .\right.$$

6.7. а) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3y - xy^3 - \dfrac{1}{3}x^6 - \dfrac{1}{3}y^6 + o(\rho^6)$;

б) $f(x,y) = 1 - \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{y^4}{6} - \dfrac{x^2y^2}{3} + o(\rho^6)$.

ЗАДАЧИ К § 7.

Исследовать на экстремум функции:

7.1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}},\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ - *точка локального минимума.*

РЕШЕНИЕ: Вычислим частные производные первого порядка функции $f(x,y)$:

$$f'_x=2x+y-\frac{1}{x^2},\ f'_y=2y+x-\frac{1}{y^2}.$$

Тогда необходимыми условиями экстремума являются:

$$\begin{cases}2x+y-\frac{1}{x^2}=0,\\ 2y+x-\frac{1}{y^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3-2y^3=xy^2-yx^2,\\ 2y+x-\frac{1}{y^2}=0\end{cases}$$

Отсюда получаем, что либо $x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, либо $2x^2+3xy+2y^2=0$. Так как последнее уравнение не имеет решений, то единственной критической точкой является точка $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}},\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Вычислим второй дифференциал в точке M. Так как

$$f''_{xx}=2+\frac{2}{x^3};\ f''_{yy}=2+\frac{2}{y^3};\ f''_{xy}=1,$$

то $d^2f(x,y)\big|_M=8dx^2+2dxdy+8dy^2>0$ при любых значениях приращений dx,dy. Поскольку второй дифференциал функции является в точке M положительно определенной квадратичной формой, то по достаточному условию экстремума заключаем, что M - точка локального минимума.

7.2. $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ - *точка локального минимума.*

РЕШЕНИЕ: Так как

$$f'_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1),\ f'_y=e^{2x}(2y+2),$$

то получаем необходимые условия экстремума: $\begin{cases}2x+2y^2+4y+1=0,\\2y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-1\end{cases}$. Значит, точка $M\left(\frac{1}{2},-1\right)$ - единственная критическая точка функции $f(x,y)$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

$$f''_{xx}(M)=e^{2x}(4x+4y^2+8y+4)\Big|_M=2e;$$

$$f''_{yy}(M)=2e^{2x}\Big|_M=2e;\ f''_{xy}(M)=e^{2x}(4y+4)\Big|_M=0.$$

Значит, $d^2f(x,y)\Big|_M=2e(dx^2+dy^2)>0$, то есть $M\left(\frac{1}{2},-1\right)$ - точка локального минимума.

7.3. $f(x,y,z)=xy+yz+zx$.

ОТВЕТ: *экстремумов нет.*

РЕШЕНИЕ: Поскольку в данном случае $f'_x=y+z$, $f'_y=x+z$, $f'_z=y+x$, то единственной критической точкой является точка $M(0,0,0)$. Далее,

$$f''_{xx}=f''_{yy}=f''_{zz}\equiv0;\ f''_{xy}=f''_{yz}=f''_{zx}\equiv1,$$

значит, $d^2f(x,y,z)\Big|_M=2(dxdy+dydz+dzdx)$.

Покажем, что в данном случае второй дифференциал является знакопеременной квадратичной формой. Действительно, если взять в качестве приращений

$dx = 0$, $dy = -dz \neq 0$, то получим, что $d^2 f = -2dz^2 < 0$. Если же положить $dx = 0$, $dy = dz \neq 0$, то $d^2 f = 2dz^2 > 0$. Это означает, что экстремума в точке M у данной функции нет.

7.4. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

ОТВЕТ: $(0,0)$ - *точка локального минимума; все точки окружности* $x^2 + y^2 = 1$ - *точки локального максимума.*

РЕШЕНИЕ: Вычислим производные первого порядка заданной функции: $f'_x = -2x(x^2 + y^2 - 1)e^{-(x^2+y^2)}$, $f'_y = -2y(x^2 + y^2 - 1)e^{-(x^2+y^2)}$. Значит, критическими являются точка $O(0,0)$ и все точки, лежащие на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Проверим достаточные условия экстремума. Поскольку

$$f''_{xx} = 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - y^2 + 1);$$

$$f''_{yy} = 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^4 + 2x^2y^2 - 5y^2 - x^2 + 1);$$

$$f''_{xy} = 4xye^{-(x^2+y^2)}(x^2 + y^2 - 2),$$

то имеем: $d^2 f(x,y)\big|_O = 2(dx^2 + dy^2) > 0$. Значит, в точке $O(0,0)$ функция $f(x,y)$ имеет локальный минимум.

Пусть теперь M - произвольная точка, лежащая на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Тогда

$$d^2 f(x,y)\big|_M = -4e^{-1}(x^2dx^2 + xydxdy + y^2dy^2) < 0$$

для любых значений приращений dx, dy. Значит, все точки, удовлетворяющие условию $x^2 + y^2 = 1$, являются точками локального максимума функции $f(x,y)$.

7.5. $f(x,y) = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

ОТВЕТ: $(0,0)$ - *точка локального максимума.*

РЕШЕНИЕ: В данном случае $f'_x = -\frac{4x}{3}(x^2+y^2)^{-1/3}$; $f'_x = -\frac{4y}{3}(x^2+y^2)^{-1/3}$ всюду, за исключением точки $(0,0)$. Очевидно, что при $x^2+y^2 \neq 0$ эти частные производные в ноль не обращаются, значит, единственной «подозрительной» точкой является начало координат. Однако несложно заметить, что $f(x,y) = 4-(x^2+y^2)^{2/3} < 4$, если $x^2+y^2 \neq 0$, и $f(0,0) = 4$. Значит, $(0,0)$ - точка локального (и даже глобального) максимума.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Исследовать на экстремум функции:

7.6. $f(x,y,z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$;

7.7. $f(x,y) = (x-y)^2 + (y^3-1)^4 - 1$;

7.8. $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2y^2}$;

7.9. $f(x,y) = x + y + 8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$, $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 2\pi$;

7.10. $f(x,y,z) = z\ln z - z - z\ln xy + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y$.

ОТВЕТЫ.

7.6. $(0,0,0)$ - *точка локального максимума.*

7.7. $(1,1)$ - *точка локального минимума.*

7.8. *Все точки кривой* $xy = 1$ *- точки локального максимума; все точки кривой* $xy = -1$ *- точки локального минимума.*

7.9. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ *- точка локального максимума.*

7.10. $\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$ *- точка локального минимума.*

ЗАДАЧИ К § 8.

8.1. Рассмотрим уравнение $x^2 = y^2$.

1. Сколько однозначных функций $y = y(x)$, $-\infty < x < +\infty$, удовлетворяют этому уравнению?

2. Сколько однозначных непрерывных функций удовлетворяют ему?

3. Сколько однозначных дифференцируемых функций удовлетворяют ему?

4. Сколько однозначных непрерывных функций $y = y(x)$ удовлетворяют этому уравнению, если а) $y(1) = 1$? б) $y(0) = 0$?

5. Сколько однозначных непрерывных функций $y = y(x)$, $1-\delta < x < 1+\delta$, удовлетворяют уравнению, если $y(1) = 1$ и δ достаточно мало?

ОТВЕТ: 1. *Бесконечно много;* 2. *четыре;* 3. *две;* 4. а) *две;* б) *четыре;* 5. *одна.*

РЕШЕНИЕ:

1. Покажем, что уравнению $x^2 = y^2$ удовлетворяют бесконечно много однозначных функций. Действительно, если $x^2 = y^2$, то $x = \pm y$. Рассмотрим произвольное множество X вещественных чисел. Тогда функция $y = \begin{cases} x, & \text{если } x \in X \\ -x, & \text{если } x \notin X \end{cases}$, очевидно, будет удовлетворять данному уравнению. Таких функций можно построить бесконечно много.

2. Ясно, что любая непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению $x^2 = y^2$, должна проходить через начало координат. Таких функций всего четыре: $y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = -|x|$.

3. Любая дифференцируемая функция обязана быть непрерывной. Выберем те из функций, перечисленных в

предыдущем пункте, которые являются дифференцируемыми. Это две функции: $y = x$ и $y = -x$.

4. а) Выберем те функции из пункта 2, которые удовлетворяют условию $y(1) = 1$. Очевидно, что этому условию удовлетворяют две из четырех функций: $y = x$ и $y = |x|$.

б) Условию $y(0) = 0$ удовлетворяют все четыре функции, перечисленные во втором пункте.

5. Условию $y(1) = 1$ удовлетворяют два из четырех непрерывных решений уравнения $x^2 = y^2$: функции $y = x$ и $y = |x|$. Однако при достаточно малом δ на промежутке $1 - \delta < x < 1 + \delta$ эти функции совпадают между собой. Значит, локально данному уравнению и условию $y(1) = 1$ удовлетворяет единственная непрерывная функция.

8.2. Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y = y(x)$ задана неявно: а) $2xy + y^2 + e^{xy} = 0$;

б) $\sin(x^2 + y^2) - \ln(xy) + y^2 = 0$.

а) ОТВЕТ:

$$y'(x) = -\frac{2y + ye^{xy}}{2x + 2y + xe^{xy}},$$

$$y''(x) = -\frac{4y' + 2(y')^2 + e^{xy}(y + xy')^2 + 2e^{xy}y'}{2x + 2y + xe^{xy}}.$$

РЕШЕНИЕ: Вычислим первую производную функции $y = y(x)$, продифференцировав по x обе части равенства, задающего эту функцию: $2y + 2xy' + 2yy' + e^{xy}(y + xy') = 0$.

Отсюда получаем, что $y'(x) = -\dfrac{2y + ye^{xy}}{2x + 2y + xe^{xy}}$.

Продифференцировав исходное равенство дважды, получим:

$2y'+2xy''+2y'+2(y')^2+2yy''+e^{xy}(y+xy')^2+e^{xy}(2y'+xy'')=0$

. Выразим отсюда $y''(x)$:

$y''(x)=-\dfrac{4y'+2(y')^2+e^{xy}(y+xy')^2+2e^{xy}y'}{2x+2y+xe^{xy}}$. Подставляя в последнюю дробь выражение для $y'(x)$, можно получить значение второй производной, выраженное только через x и $y(x)$.

б) ОТВЕТ: $y'(x)=\dfrac{1/x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y-1/y+2y\cos(x^2+y^2)}$;

$$y''(x)=\frac{4(x+yy')^2\sin(x^2+y^2)-2(1+(y')^2)\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-1/y+2y}-$$
$$-\frac{1/x^2-y'/y^2-2(y')^2}{2y\cos(x^2+y^2)-1/y+2y}.$$

РЕШЕНИЕ: Найдем первую производную: $(2x+2yy')\cos(x^2+y^2)-\dfrac{1}{x}-\dfrac{y'}{y}+2yy'=0$, значит,

$$y'(x)=\frac{1/x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y-1/y+2y\cos(x^2+y^2)}.$$

Продифференцируем исходное равенство второй раз:

$$(2+2(y')^2+2yy'')\cos(x^2+y^2)-(2x+2yy')^2\sin(x^2+y^2)+$$
$$+\frac{1}{x^2}-\frac{y''}{y}+\frac{y'}{y^2}+2yy''+2(y')^2=0.$$

Таким образом,

$$y''(x)=\frac{4(x+yy')^2\sin(x^2+y^2)-2(1+(y')^2)\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-1/y+2y}-$$
$$-\frac{1/x^2-y'/y^2-2(y')^2}{2y\cos(x^2+y^2)-1/y+2y}.$$

8.3. Найти dz и d^2z, если $x^2+y^2+z^2=e^z$.

ОТВЕТ: $dz=\dfrac{2xdx+2ydy}{e^z-2z}$;

$$d^2z=\frac{(4x^2(2-e^z)+2(e^z-2z)^2)dx+8xy(2-e^z)dxdy}{(e^z-2z)^3}+$$

$$+\frac{(4y^2(2-e^z+2(e^z-2z)^2)dy}{(e^z-2z)^3}.$$

РЕШЕНИЕ: Вычислим частные производные первого и второго порядков функции $z(x,y)$: $2x+2zz'_x=e^z z'_x$, следовательно, $z'_x=\dfrac{2x}{e^z-2z}$. Аналогично $z'_y=\dfrac{2y}{e^z-2z}$.

Далее, $2+2(z'_x)^2+2zz''_{xx}=e^z((z'_x)^2+z''_{xx})$. Отсюда

$$z''_{xx}=\frac{e^z(z'_x)^2-2(z'_x)^2-2}{2z-e^z}=\frac{4x^2(2-e^z)+2(e^z-2z)^2}{(e^z-2z)^3}.$$

Аналогично $z''_{yy}=\dfrac{4y^2(2-e^z)+2(e^z-2z)^2}{(e^z-2z)^3}$.

Наконец, продифференцировав исходное равенство сначала по x, а затем по y, получим:

$$2z'_x z'_y+2zz''_{xy}=e^z z''_{xy}+e^z z'_x z'_y.$$

Отсюда $z''_{xy}=\dfrac{z'_x z'_y(2-e^z)}{e^z-2z}=\dfrac{4xy(2-e^z)}{(e^z-2z)^3}$.

Подставляя полученные выражения в формулы для записи первого и второго дифференциалов, окончательно получаем, что $dz=\dfrac{2xdx+2ydy}{e^z-2z}$;

$$d^2z=\frac{(4x^2(2-e^z)+2(e^z-2z)^2)dx+8xy(2-e^z)dxdy}{(e^z-2z)^3}+$$

$$+\frac{(4y^2(2-e^z+2(e^z-2z)^2)dy}{(e^z-2z)^3}.$$

8.4. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$**, если** $F(xz, yz) = 0$.

ОТВЕТ:

$$\frac{xyz^2(F''_{11}(F'_2)^2-2F''_{12}F'_1F'_2+F''_{22}(F'_1)^2)+2xz(F'_1)^2F'_2+2yzF'_1(F'_2)^2}{(xF'_1+yF'_2)^3}$$

РЕШЕНИЕ: Продифференцируем равенство $F(xz, yz) = 0$ по переменным x и y, учитывая, что $z = z(x,y)$: $F'_1(z+xz'_x)+F'_2yz'_x=0$; $F'_1xz'_y+F'_2(z+yz'_y)=0$.

Тогда $z'_x=-\dfrac{zF'_1}{xF'_1+yF'_2}$, $z'_y=-\dfrac{zF'_2}{xF'_1+yF'_2}$.

Продифференцировав исходное равенство сначала по y, а затем по x, получаем соотношение:

$$F''_{11}xz'_y(z+xz'_x)+F''_{12}xyz'_xz'_y+F'_1(z'_y+xz''_{yx})+F''_{21}(z+xz'_x)(z+yz'_y)+$$
$$+F''_{22}yz'_x(z+yz'_y)+F'_2(z'_x+yz''_{xy})=0,$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{F''_{11}xz'_y(z+xz'_x)+F''_{12}xyz'_xz'_y+F'_1z'_y}{xF'_1+yF'_2}+$$
$$+\frac{F''_{21}(z+xz'_x)(z+yz'_y)+F''_{22}yz'_x(z+yz'_y)+F'_2z'_x}{xF'_1+yF'_2}=$$
$$=\frac{xyz^2(F''_{11}(F'_2)^2-2F''_{12}F'_1F'_2+F''_{22}(F'_1)^2)+2xz(F'_1)^2F'_2+2yzF'_1(F'_2)^2}{(xF'_1+yF'_2)^3}$$

8.5. Проверить, что функция $z(x,y)$, заданная соотношением $F\left(x^2+y^2,\frac{z}{x}\right)=0$, является решением уравнения $xy\frac{\partial z}{\partial x}-x^2\frac{\partial z}{\partial y}=yz$.

РЕШЕНИЕ: Вычислим производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z(x,y)$, заданной неявно уравнением $F\left(x^2+y^2,\frac{z}{x}\right)=0$:

$$F_1'2x+F_2'\frac{xz_x'-z}{x^2}=0;\quad F_1'2y+F_2'\frac{z_y'}{x}=0,$$

значит, $$z_x'=\frac{zF_2'-2x^3F_1'}{xF_2'};\quad z_y'=-\frac{2xyF_1'}{F_2'}.$$

Подставляя полученные выражения для частных производных в уравнение $xy\frac{\partial z}{\partial x}-x^2\frac{\partial z}{\partial y}=yz$, имеем: $\frac{zxyF_2'-2x^4yF_1'}{xF_2'}+\frac{2x^3yF_1'}{F_2'}=yz$, что эквивалентно верному тождеству $zy=yz$. Значит, функция $z(x,y)$, заданная соотношением $F\left(x^2+y^2,\frac{z}{x}\right)=0$, действительно удовлетворяет данному уравнению.

8.6. Найти экстремумы функции $z=z(x,y)$, заданной неявно: $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$.

ОТВЕТ: $(0,-2)$ - *точка локального минимума*; $(0,16/7)$ - *точка локального максимума.*

РЕШЕНИЕ: Вычислим первые производные функции $z=z(x,y)$. Дифференцированием исходного равенства получаем:

$4x+2zz'_x+8yz'_x-z'_x=0$, $\quad 4y+2zz'_y+8z+8yz'_y-z'_y=0$.

Отсюда $z'_x=\dfrac{4x}{1-2z-8y}$, $z'_y=\dfrac{4y+8z}{1-2z-8y}$. Решая систему уравнений $\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0 \end{cases}$ находим: $\begin{cases} x=0, \\ y=-2z \end{cases}$. Подставив эти значения в соотношение для функции $z(x,y)$, получим: $8z^2+z^2-16z^2-z+8=0$, то есть $z=1$ или $z=-8/7$. Значит, точками, подозрительными на экстремум, являются точки $A(0,-2)$ и $B(0,16/7)$.

Найдем второй дифференциал функции $z(x,y)$: поскольку

$$4+2(z'_x)^2+2zz''_{xx}+8yz''_{xx}-z''_{xx}=0,$$

$$4+2(z'_y)^2+2zz''_{yy}+16z'_y+8yz''_{yy}-z''_{yy}=0,$$

$$2z'_xz'_y+2zz''_{xy}+8z'_x+8yz''_{xy}-z''_{xy}, \text{ то } z''_{xx}\big|_A=\frac{4}{15},\ z''_{yy}\big|_A=\frac{4}{15},$$

$$z''_{xy}\big|_A=0;\ z''_{xx}\big|_B=-\frac{28}{105},\ z''_{yy}\big|_B=-\frac{28}{105},\ z''_{xy}\big|_B=0.$$

Получаем выражения для второго дифференциала в точках A и B:

$d^2z\big|_A=\dfrac{4}{15}(dx^2+dy^2)$, $d^2z\big|_B=-\dfrac{28}{105}(dx^2+dy^2)$. Очевидно, что второй дифференциал в точке A является положительно определенной квадратичной формой; в точке B - отрицательно определенной. Значит, точка $A(0,-2)$ - точка локального минимума функции $z(x,y)$, $B(0,16/7)$ - точка локального максимума.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

8.7. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = x^2y^2$, где функция $y = y(x)$ есть решение уравнения $1 + x + y^2 = e^{x+y}$.

8.8. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x,y)$, заданной неявно: а) $z\cos x + y\cos z + x\cos y = 3$; б) $z(1 + x^2) = y(1 + z^4)$.

8.9. Найти dz и d^2z, если а) $x^2 + zx + z^2 + y = 0$, б) $2\ln(xyz) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$.

8.10. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x,y)$, заданной уравнением $xy + xz + yz = x^3 + y^3 + z^3$ в точке $M(1,1,1)$.

8.11. Проверить, что функция $z = z(x,y)$, заданная соотношением $F\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}, \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z}\right)$, является решением уравнения $(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$.

8.12. Найти экстремумы функции $z = z(x,y)$, заданной неявно:
$5z^2 + 4zy + y^2 - 2y + 3x^2 - 6x + 4 = 0$.

ОТВЕТЫ.

8.7. $2xy^2 + 2x^2y\frac{1 - e^{x+y}}{e^{x+y} - 2y}$.

8.8. **а)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xz}{4yz^3 - x^2 - 1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 + z^4}{x^2 + 1 - 4yz^3}$.

8.9. **а)** $dx = -\dfrac{2x+z}{x+2z}dx - \dfrac{1}{x+2z}dy$,

$$d^2z = -\frac{6x^2+6z^2+6xz}{(x+2z)^3}dx^2 - \frac{6x}{(x+2z)^3}dxdy - \frac{2}{(x+2z)^3}dy^2.$$

б) $dz = \dfrac{x^2-1}{z^2+1}\cdot\dfrac{z}{x}dx + \dfrac{y^2-1}{z^2+1}\cdot\dfrac{z}{y}dy$,

$$d^2z = \frac{1}{\left(z+{}^1\!/\!_z\right)^3}\left(\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right)dx^2 -\right.$$

$$-2\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\right)dxdy +$$

$$\left.+\left(\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\right)dy^2\right).$$

8.10. *Касательная плоскость* $x+y+z-3=0$;

нормаль $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

8.12. (1,9) - *точка локального минимума*; (1,1) - *точка локального максимума.*

ЗАДАЧИ К § 9.

9.1. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ **и** $\dfrac{dz}{dx}$, **если** $x^3+y^2-3z+a=0$, $z^2-2y^2-x+6=0$.

ОТВЕТ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6zx^2-3}{12y-4yz}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{6x^2-1}{6-2z}$.

РЕШЕНИЕ: Продифференцируем по переменной x оба исходных уравнения. Получим систему:

$$\begin{cases} 3x^2+2y\dfrac{dy}{dx}-3\dfrac{dz}{dx}=0, \\ 2z\dfrac{dz}{dx}-4y\dfrac{dy}{dx}-1=0. \end{cases}$$

Эта система является линейной относительно переменных $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{dz}{dx}$. Решив ее, получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6zx^2-3}{12y-4yz},\ \frac{dz}{dx}=\frac{6x^2-1}{6-2z}.$$

9.2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ **и** $\dfrac{du}{dx}$, **если** $u^2+x^2+y^2+z^2=1$, $\ln xy+\dfrac{y}{x}=1$, $\ln\dfrac{z}{x}+zx=1$.

ОТВЕТ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y-x)}{x(y+x)}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z(1-xz)}{x(1+xz)}$,

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left(\frac{y^2(x-y)}{x(x+y)}+\frac{z^2(xz-1)}{x(xz+1)}-x\right).$$

РЕШЕНИЕ: Мы имеем систему из трех уравнений, задающих неявным образом функции $y(x)$, $z(x)$ и $u(x)$. Чтобы вычислить производные этих функций по переменной x, продифференцируем по этой переменной все уравнения системы:

$$\begin{cases} 2u\dfrac{du}{dx}+2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x^2}=0, \\ \dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}+x\dfrac{dz}{dx}+z=0. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений полученной системы находим соответственно: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y-x)}{x(y+x)}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z(1-xz)}{x(1+xz)}$. Подставив эти выражения в первое уравнение системы, имеем: $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\left(\dfrac{y^2(x-y)}{x(x+y)}+\dfrac{z^2(xz-1)}{x(xz+1)}-x\right)$.

9.3. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$, **если** $xu-yv=2$, $xv+yu=1$.

ОТВЕТ: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{vx-uy}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{ux+vy}{x^2+y^2}$.

РЕШЕНИЕ: Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы неявно системой уравнений: $\begin{cases} xu-yv=2, \\ xv+yu=1. \end{cases}$ Для того, чтобы вычислить частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, продифференцируем оба уравнения системы по x. Получим систему уравнений, линейную относительно переменных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x}$: $\begin{cases} u+xu'_x-yv'_x=0, \\ v+xv'_x+yu'_x=0. \end{cases}$

Из этой системы находим, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{yu - xv}{x^2 + y^2}$.

Для нахождения $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ продифференцируем исходную систему по y: $\begin{cases} xu'_y - v - yv'_y = 0, \\ xv'_y + u + yu'_y = 0. \end{cases}$ Отсюда следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{vx - uy}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{ux + vy}{x^2 + y^2}$.

9.4. Найти первые и вторые дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке $M(1, -1)$, если $u(1, -1) = v(1, -1) = 2$, и функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы неявно: $xu + yv = 0$, $uv - xy = 5$.

ОТВЕТ: $du\big|_M = -\dfrac{1}{4}(5dx + 3dy)$, $dv\big|_M = \dfrac{1}{4}(3dx + 5dy)$,

$$d^2u\big|_M = \frac{55dx^2 + 50dxdy - 25dy^2}{32},$$

$$d^2v\big|_M = \frac{-25dx^2 + 50dxdy + 55dy^2}{32}.$$

РЕШЕНИЕ: Вычислим сначала все частные производные первого порядка функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Для этого так же, как и в предыдущей задаче, продифференцируем систему уравнений $\begin{cases} xu + yv = 0, \\ uv - xy = 5 \end{cases}$ сначала по переменной x, а затем по y:

$$\begin{cases} u + xu'_x + yv'_x = 0, \\ u'_x v + uv'_x - y = 0. \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} xu'_y + v + yv'_y = 0, \\ u'_y v + uv'_y - x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Подставив в систему (1) точку $M(1,-1)$, получим линейную систему $\begin{cases}2+u'_x-v'_x=0,\\ 2u'_x+2v'_x+1=0\end{cases}$, откуда следует, что $u'_x(M)=-\dfrac{5}{4}$, $v'_x(M)=\dfrac{3}{4}$.

Аналогично из системы (2) получаем, что $\begin{cases}u'_y+2-v'_y=0,\\ 2u'_y+2v'_y-1=0\end{cases}$. Значит, $u'_y(M)=-\dfrac{3}{4}$, $v'_y(M)=\dfrac{5}{4}$. Таким образом, первые дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке M имеют вид: $du\big|_M=-\dfrac{1}{4}(5dx+3dy)$, $dv\big|_M=\dfrac{1}{4}(3dx+5dy)$.

Вычислим теперь вторые производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Для этого продифференцируем системы уравнений (1) и (2) еще раз (считаем, что все смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования). Получим три системы:

$$\begin{cases}2u'_x+xu''_{xx}+yv''_{xx}=0,\\ u''_{xx}v+2u'_xv'_x+uv''_{xx}=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}u'_y+xu''_{xy}+v'_x+yv''_{xy}=0,\\ u''_{xy}v+u'_xv'_y+u'_yv'_x+uv''_{xy}-1=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}xu''_{yy}+2v'_y+yv''_{yy}=0,\\ u''_{yy}v+2u'_yv'_y+uv''_{yy}=0.\end{cases}$$

Подставим в эти системы точку M. Так как значения первых производных в этой точке уже известны, то имеем:

$$\begin{cases} -\dfrac{10}{4}+u''_{xx}-v''_{xx}=0, \\ 2u''_{xx}-\dfrac{30}{16}+2v''_{xx}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{3}{4}+u''_{xy}+\dfrac{3}{4}-v''_{xy}=0, \\ 2u''_{xy}-\dfrac{34}{16}+2v''_{xy}-1=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u''_{yy}+\dfrac{5}{2}-v''_{yy}=0, \\ 2u''_{yy}-\dfrac{30}{16}+2v''_{yy}=0. \end{cases}$$

Отсюда $u''_{xx}(M)=\dfrac{55}{32}$, $v''_{xx}(M)=-\dfrac{25}{32}$, $u''_{xy}(M)=v''_{xy}(M)=\dfrac{25}{32}$, $u''_{yy}(M)=-\dfrac{25}{32}$, $v''_{yy}(M)=\dfrac{55}{32}$.

Значит, $$d^2u\big|_M=\frac{55dx^2+50dxdy-25dy^2}{32},$$

$$d^2v\big|_M=\frac{-25dx^2+50dxdy+55dy^2}{32}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

9.5. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, $x+y+z=a$.

9.6. Найти первые и вторые производные функций $z(x,y)$ и $u(x,y)$, если $u+x+y+z=a$, $xyzu=b$.

9.7. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ в точке $x=-1$, $y=1$ ($u=2$, $v=-2$), если

$$xuv+yxu+vxy+uvy=0,\ x^2+y^2+u^2+v^2=10.$$

9.8. Найти первые и вторые дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке $M(1,2)$, если $u(M)=v(M)=0$ и функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы неявно:

$$xe^{u+v}+2uv=1,\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x.$$

ОТВЕТЫ.

9.5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy-z^2-yz+x^2}{z^2-xy-y^2+xz},\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{yz-x^2+y^2-xz}{z^2-xy-y^2+xz}.$

9.6. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z(u-x)}{x(u-z)},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z(u-y)}{y(u-z)},$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u(z-x)}{x(z-u)},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{u(z-y)}{y(z-u)},$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=zu\dfrac{(u-z)^2+(u-x)^2+(z-x)^2}{x^2(u-z)^3},$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=zu\dfrac{(u-z)^2+(u-y)^2+(z-y)^2}{y^2(u-z)^3}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zu\dfrac{(u-x)(u-y)+(z-x)(z-y)}{xy(u-z)^3}.$

9.7. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{7}{4},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{9}{4},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{9}{4},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{7}{4}.$

9.8. $du\big|_M=-\dfrac{1}{3}dy,\ dv\big|_M=-dx+\dfrac{1}{3}dy,$

$d^2u\big|_M=\dfrac{-24dxdy+14dy^2}{27},\ d^2v\big|_M=\dfrac{27dx^2-12dxdy-2dy^2}{27}.$

ЗАДАЧИ К § 10.

10.1. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если

$u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

ОТВЕТ: $2u\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial v}$

РЕШЕНИЕ: По правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Вычислим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=y\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+$$

$$+\frac{1}{y}\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=x\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)-\frac{x}{y^2}\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение, получим:

$$x^2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-$$

$$-\left(x^2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)-\frac{2x}{y}\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

что эквивалентно $4x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \dfrac{2x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$, или $2u \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

10.2. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{z}$, если $u = 2x - z^2$, $v = \dfrac{y}{z}$.

ОТВЕТ: $v\dfrac{\partial z}{\partial v}(z^2 - u) = z(u + z^2)$.

РЕШЕНИЕ: Так как функция $z = z(x, y)$ входит формальным аргументом в выражения для переменных u и v, то, дифференцируя эти выражения, получаем следующие соотношения: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2z\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2z\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{z} - \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\left(2 - 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\left(-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z} - \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Выражая из последних равенств $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2\dfrac{\partial z}{\partial u}}{1 + 2z\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{y}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial v}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial v}}{1 + 2z\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{y}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения для производных в исходное уравнение и учитывая, что $x = \frac{u+z^2}{2}$, $y = vz$, окончательно получаем: $v\frac{\partial z}{\partial v}(z^2 - u) = z(u + z^2)$.

10.3. Приняв u и v за новые независимые переменные, а $w = w(u,v)$ - за новую функцию, преобразовать уравнение $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz$, если $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$.

ОТВЕТ: $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

РЕШЕНИЕ: Дифференцируя w как непосредственно заданную функцию $w = w(x, y, z(x, y))$, получаем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Запишем теперь выражение $\frac{\partial w}{\partial x}$, дифференцируя функцию w как композицию $w = w(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y)))$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Приравнивая найденные выражения, получаем уравнение

$$y - \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

из которого находим, что $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + \frac{\partial w}{\partial u} - z\frac{\partial w}{\partial v}}{1 + y\frac{\partial w}{\partial u} + x\frac{\partial w}{\partial v}}$.

Таким же методом получаем уравнение

$$x-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(x\frac{\partial z}{\partial y}-1\right),$$

из которого находим, что $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x-z\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+y\dfrac{\partial w}{\partial u}+x\dfrac{\partial w}{\partial v}}$.

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$(xy+z)\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)+(1-y^2)\left(x-z\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)=$$

$$=(x+yz)\left(1+y\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

что равносильно $\dfrac{\partial w}{\partial v}(-2xyz-z^2+1-y^2-x^2)=0$, то есть

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

10.4. Преобразовать уравнение $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, приняв x за функцию, а y и z - за независимые переменные.

ОТВЕТ: $y\dfrac{\partial x}{\partial y}=x-z$.

РЕШЕНИЕ: Для удобства записи введем новые обозначения: $w=x$, $u=y$, $v=z$. Приравнивая выражения $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, полученные дифференцированием функции w, заданной непосредственно как $w=w(x,y,z(x,y))$, и как композиции $w=w(u(x,y,z(x,y)),v(x,y,z(x,y)))$, получаем уравнения $1=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$, $0=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$, откуда находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial w}{\partial v}}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\Big/\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)=-\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right).$$

Подставляя эти выражения для производных в исходное уравнение, получаем $(x-z)-y\frac{\partial x}{\partial y}=0$, то есть $y\frac{\partial x}{\partial y}=x-z$.

10.5. Приняв u и v за новые независимые переменные, а $w=w(u,v)$ - за новую функцию, преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, $w=\frac{z}{x}$.

ОТВЕТ: $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

РЕШЕНИЕ: Приравнивая выражения $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$, полученные дифференцированием функции w, заданной непосредственно как $w=w(x,y,z(x,y))$, и как композиции $w=w(u(x,y,z(x,y)),v(x,y,z(x,y)))$, получаем уравнения

$$-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v},\qquad \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v},$$

откуда находим: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x}+x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}$.

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x}+x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial u}+$$

$$+\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial v}=-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}+x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\right)+$$

$$+\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=$$

$$=2\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

(здесь мы использовали найденное ранее выражение для $\frac{\partial z}{\partial x}$). Аналогично,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)=x\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial u}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial v}=x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\right)+$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Наконец,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial u}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial v}=\frac{\partial w}{\partial u}+x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, имеем (как обычно, здесь мы считаем, что значения смешанных производных не зависят от порядка дифференцирования):

$$2\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-2\frac{\partial w}{\partial u}-2x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+$$

$$+2\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0,$$

что равносильно $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{y^2}{x^3}+\frac{2y}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=0$ или $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

10.6. Преобразовать к полярным координатам r, φ ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$) выражение $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

ОТВЕТ: $r\dfrac{\partial z}{\partial r}$.

РЕШЕНИЕ: Так как $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$,

а $$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\varphi,$$

то из полученной системы уравнений относительно неизвестных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Отсюда получаем, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = r\cos^2\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} +$$

$$+ r\sin^2\varphi\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\frac{\partial z}{\partial r}.$$

10.7. Приняв y за новое независимое переменное, а x - за функцию от y, преобразовать уравнение $y'' + (e^y - x)(y')^3 = 0$.

ОТВЕТ: $x'' + x = e^y$.

РЕШЕНИЕ: Введем для удобства записи новые обозначения $u = x$, $v = y$. Тогда, с одной стороны, $u'_x = 1$, а с другой: $u'_x = u'_v v'_x = u'_v y'$. Отсюда получаем, что $y' = \dfrac{1}{u'_v} = \dfrac{1}{x'}$. Далее,

$$0 = u''_{xx} = (u'_v y')'_x = y'(u'_v)'_x + u'_v y'' =$$

$$y'(u'_v)'_v v'_x + u'_v y'' = u''_{vv}(y')^2 + u'_v y''.$$

Отсюда $\qquad y'' = -\dfrac{u''_{vv}(y')^2}{u'_v} = -\dfrac{x''(y')^2}{x'} = -\dfrac{x''}{(x')^3}$.

Подставляя получившиеся выражения для y' и y'' в исходное уравнение, имеем: $-\dfrac{x''}{(x')^3} + (e^y - x)\dfrac{1}{(x')^3} = 0$, что равносильно $x'' + x = e^y$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

10.8. Приняв v за новую функцию $v(x,y)$, преобразовать уравнение $(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, если $v = (x-y)u$.

10.9. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение $2y\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} + 2y = 0$, если $y = v$, $x = \dfrac{u+v^2}{2}$.

10.10. Приняв u и v за новые независимые переменные, а $w = w(u,v)$ - за новую функцию, преобразовать уравнение $x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) + z + x + y = 0$, если $u = x + y$, $v = x - y$, $w = zx$.

10.11. Приняв u и v за новые независимые переменные, а $w = w(u,v)$ - за новую функцию, преобразовать уравнение $yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}=e^z$, если $u=x^2+y^2$, $v=arctg\frac{x}{y}$, $w=(x^2+y^2)e^{-z}$.

10.12. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $u=\frac{y}{x}$, $v=yx^3$.

10.13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а $w=w(u,v)$ - за новую функцию, преобразовать уравнение $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+4\frac{\partial z}{\partial x}+4\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$, если $u=2y-x$, $v=x$, $w=ze^{x+y}$.

10.14. Преобразовать к полярным координатам r,φ ($x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$) выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

10.15. Приняв y за новое независимое переменное, а x - за функцию от y, преобразовать уравнение $y''-y'-(y')^3x^3=0$.

ОТВЕТЫ.

10.8. $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0$.

10.9. $\frac{\partial z}{\partial v}+2v=0$.

10.10. $2\frac{\partial w}{\partial u}+u=0$.

10.11. $\frac{\partial w}{\partial v}\ln\frac{w}{u}=u$.

10.12. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \dfrac{1}{4v}\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$.

10.13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{\partial w}{\partial v} - w = 0$.

10.14. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$.

10.15. $x'' + (x')^2 + x^3 = 0$.

ЗАДАЧИ К § 11.

11.1. Найти точки условного экстремума функции $z(x,y)=x^2+y^2$ **при наличии уравнения связи** $x+y=2$.

ОТВЕТ: $(1,1)$ - *точка условного минимума*, $z(1,1)=2$.

РЕШЕНИЕ: *1 способ.* Выразим из уравнения $x+y=2$ переменную y через x и подставим в исходную функцию. Получим, что нам нужно исследовать на экстремум функцию одной переменной:

$$z(x)=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4.$$

Эта функция представляет собой квадратный трехчлен, первый коэффициент положителен, следовательно $z(x)$ достигает своего минимума в точке $x=\frac{4}{4}=1$, при этом $y=2-1=1$, $z(1,1)=2$.

2 способ. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-2).$$

Найдем точки, подозрительные на экстремум:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0, \\ L'_y(x,y,\lambda)=2y+\lambda=0, \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=x+y-2=0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x=y=1, \quad \lambda=-2.$$

Вычислим вторые производные функции Лагранжа в точке $M(1,1)$: $L''_{xx}(M)=2$, $L''_{yy}(M)=2$, $L''_{xy}(M)=0$. Значит, второй дифференциал функции Лагранжа при наличии условий связи в точке $M(1,1)$ имеет вид: $d^2L\big|_M=2(dx^2+dy^2)$. Очевидно, что он представляет собой положительно определенную квадратичную форму переменных dx и dy. Значит, $M(1,1)$ - точка условного минимума.

11.2. Найти точки условного экстремума функции $f(x,y,z)=xyz$ при наличии уравнения связи $x^2+y^2+z^2=1$.

ОТВЕТ: $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$-

- точки условного максимума;

$M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_6\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$M_7\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_8\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ -

- точки условного минимума.

РЕШЕНИЕ: Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

Вычислим ее частные производные по всем переменным и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=yz+2\lambda x=0, \\ L'_y(x,y,\lambda)=xz+2\lambda y=0, \\ L'_z(x,y,\lambda)=xy+2\lambda z=0, \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на x, второе - на y, третье – на z и сложим: $3xyz+2\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$ или, с учетом четвертого уравнения системы, $3xyz=-2\lambda$. Подставляя это соотношение в первое уравнение системы, имеем: $yz-3x^2yz=0$. Это означает, что либо $x^2=\frac{1}{3}$, либо $yz=0$. Однако, если верно последнее, то из первых трех уравнений системы получаем: $x=y=z=0$, что противоречит четвертому уравнению системы. Итак, $x^2=\frac{1}{3}$, а в силу симметрии системы по переменным x, y и z это означает, что $x^2=y^2=z^2=\frac{1}{3}$

Таким образом, имеем восемь «подозрительных» точек:

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(этим точкам соответствует значение $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{3}}$);

$$M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ M_6\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$M_7\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ M_8\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(этим точкам соответствует значение $\lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}$).

Вычислим вторые производные функции Лагранжа в указанных точках. Заметим сначала, что $L''_{xx}(M_k)=L''_{yy}(M_k)=L''_{zz}(M_k)=2\lambda$, $k=1,2,\ldots,8$.

Значит,

$L''_{xx}(M_k)=L''_{yy}(M_k)=L''_{zz}(M_k)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ при $k=1,2,3,4$ и

$L''_{xx}(M_k)=L''_{yy}(M_k)=L''_{zz}(M_k)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ при $k=5,6,7,8$.

Далее, $L''_{xy} = z$, $L''_{xz} = y$, $L''_{yz} = x$. Рассмотрим, например, точку $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Получаем, что при наличии уравнения связи

$$d^2L\Big|_{M_1} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{2}{\sqrt{3}}(dxdy + dydz + dxdz).$$

Чтобы упростить последнее выражение, воспользуемся уравнением связи. В силу того, что точка M_1 удовлетворяем необходимым условиям экстремума, имеем:

$$d(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\Big|_{M_1} = 2xdx + 2ydy + 2zdz\Big|_{M_1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(dx + dy + dz) = 0.$$

Если выразить отсюда, например, dz через dx и dy и подставить в выражение для второго дифференциала функции Лагранжа, то оно примет следующий вид: $d^2L\Big|_{M_1} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(3dx^2 + 3dxdy + 3dy^2)$. Так как последнее выражение принимает отрицательные значения при всех возможных значениях переменных dx и dy, то это означает, что точка $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума функции $f(x, y, z)$ при наличии уравнения связи.

Аналогичные выкладки можно проделать для остальных семи точек и получить, что точки $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ также являются точками условного максимума, а точки $M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_6\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_7\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $M_8\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$- точками условного минимума функции $f(x,y,z)$.

11.3. Выяснить, является ли точка $M(1,1,1)$ точкой условного экстремума функции

$$f(x,y,z)=xy+xz+yz,$$

если $2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$.

ОТВЕТ: *да, является точкой условного максимума.*

РЕШЕНИЕ: Напишем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,z,\lambda)=xy+xz+yz+\lambda(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17)$$

Координаты x,y,z,λ критической точки этой функции должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} y+z+6\lambda x^2y^2z+8\lambda x=0, \\ x+z+4\lambda x^3yz+10\lambda y=0, \\ x+y+2\lambda x^3y^2+12\lambda z=0, \\ 2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2=17. \end{cases}$$

Проверка показывает, что точка $x=1$, $y=1$, $z=1$, $\lambda=-1/7$ является решением этой системы. Следовательно, в точке $M(1,1,1)$ возможен условный экстремум функции $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ при наличии уравнения связи $2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$. Найдем второй дифференциал функции Лагранжа, учитывая наличие уравнения связи:

$$d^2L\big|_M=-\frac{20}{7}dx^2-2dy^2-\frac{12}{7}dz^2-\frac{10}{7}dxdy+\frac{6}{7}dydz+\frac{2}{7}dxdz.$$

В силу того, что точка M удовлетворяем необходимым условиям экстремума, имеем:

$$d(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17)\Big|_M=14(dx+dy+dz)=0.$$

Отсюда получаем, что $dz=-(dx+dy)$. Подставляя этот результат в выражение для второго дифференциала функции Лагранжа, находим:

$$d^2L\Big|_M=-\frac{2}{7}\left(17dx^2+21dxdy+16dy^2\right).$$

Так как выражение $17dx^2+21dxdy+16dy^2$, очевидно, принимает положительные значения при любых значениях переменных dx, dy, то второй дифференциал функции Лагранжа при наличии уравнения связи является отрицательно определенной квадратичной формой. Это означает, что в точке $M(1,1,1)$ функция $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ имеет условный экстремум, а именно – условный максимум.

11.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=xy-x^2y-\dfrac{xy^2}{2}$ в области $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

ОТВЕТ: *наибольшее значение* $\dfrac{2}{27}$; *наименьшее* -2.

РЕШЕНИЕ: Наибольшее и наименьшее значения функции в области достигаются либо в точках локального экстремума, лежащих внутри этой области, либо на ее границе. Найдем точки функции $f(x,y)=xy-x^2y-\dfrac{xy^2}{2}$, подозрительные на экстремум. Из системы уравнений $\begin{cases} f'_x = y - 2xy - \dfrac{y^2}{2} = 0, \\ f'_y = x - x^2 - xy = 0 \end{cases}$

находим, что критическими для данной функции являются точки $(0,0)$, $(1,0)$ $(0,2)$ и $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$. Все эти точки принадлежат рассматриваемой области (первые три лежат на ее границе, четвертая – внутри). Найдем значения функции в критических точках: $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 0$, $f(0,2) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{27}$.

Рассмотрим теперь поведение функции на границе области. Так как в данном случае область является прямоугольником, то граница ее состоит из четырех отрезков: $l_1 = \{0 \le x \le 1, y = 0\}$, $l_2 = \{0 \le x \le 1, y = 2\}$, $l_3 = \{0 \le y \le 2, x = 0\}$ и $l_4 = \{0 \le y \le 2, x = 1\}$. Будем рассматривать каждый отрезок отдельно. На l_1 имеем: $f(x,y) = f(x,0) \equiv 0$. На l_2: $f(x,y) = f(x,2) = -2x^2$, $0 \le x \le 1$. Функция $-2x^2$ на отрезке $[0,1]$ принимает свое наибольшее значение в точке $x = 0$ (оно равняется 0), наименьшее – в точке $x = 1$ (оно равняется -2). Перейдем к отрезку l_3. На нем $f(x,y) = f(0,y) \equiv 0$. Наконец, на отрезке l_4 получаем, что $f(x,y) = f(1,y) = -\dfrac{y^2}{2}$, $0 \le y \le 2$. Эта функция принимает свое наибольшее значение 0 при $y = 0$ и наименьшее значение -2 при $y = 2$.

Сравнивая все полученные результаты, окончательно приходим к выводу, что наибольшим значением функции

$f(x,y)=xy-x^2y-\dfrac{xy^2}{2}$ в области $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$ является число $\dfrac{2}{27}$, наименьшим – число -2.

11.5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y,z)=x+y+z$ **в области** $x^2+y^2\le z\le 1$.

ОТВЕТ: *наибольшее значение* $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+1$,

наименьшее - $f\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

РЕШЕНИЕ: Известно, что функция достигает своих наибольших и наименьших значений в области либо в точках экстремума, лежащих внутри этой области, либо на ее границе. Очевидно, что точек локального экстремума функция $f(x,y,z)=x+y+z$ не имеет. Найдем наибольшее и наименьшее значения данной функции на каждом из участков границы: $x^2+y^2=z$, $0\le z\le 1$ и $z=1$, $x^2+y^2\le 1$.

Рассмотрим часть поверхности $x^2+y^2=z, 0\le z\le 1$. Подставим выражения для переменной z, полученные из уравнения $x^2+y^2=z$, в функцию $f(x,y,z)$ и исследуем на экстремум полученную функцию переменных x и y: получаем, что $f(x,y)=x+y+x^2+y^2$, следовательно, $f'_x(x,y)=1+2x$, $f'_y(x,y)=1+2y$ и критической в данном случае является точка $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. Эта точка удовлетворяет условию $x^2+y^2\le 1$, следовательно, принадлежит рассматриваемой поверхности. Значение функции в этой точке: $f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

При $z=1$, $x^2+y^2\le 1$ имеем: $f(x,y)=x+y+1$, $x^2+y^2\le 1$. Так как функция $x+y+1$ является линейной, то она не имеет точек локального экстремума внутри круга $x^2+y^2\le 1$. Значит, мы должны найти условные экстремумы этой функции при условии $x^2+y^2=1$. Составим функцию Лагранжа: $L=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$. Необходимыми условиями экстремума являются $\begin{cases} L'_x=1+2\lambda x=0, \\ L'_y=1+2\lambda y=0, \\ L'_\lambda=x^2+y^2-1=0. \end{cases}$ Отсюда находим критические точки $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем значения функции $f(x,y)=x+y+1$ в этих точках: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+1$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}+1$. Сравнивая между собой три найденных значения $f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+1$ и $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}+1$, находим, что наибольшим значением функции $f(x,y,z)=x+y+z$ в области $x^2+y^2\le z\le 1$ является $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+1$, наименьшим - $f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

11.6. Представить положительное число a в виде суммы пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

ОТВЕТ: $\frac{a}{5}, \frac{a}{5}, \frac{a}{5}, \frac{a}{5}, \frac{a}{5}$.

РЕШЕНИЕ: Несложно видеть, что данная задача сводится к задаче нахождения условного максимума функции $f(x,y,z,s,t) = xyzst$ при условии $x+y+z+s+t=a$.

Составим функцию Лагранжа: $L = xyzst + \lambda(x+y+z+s+t-a)$. Критические точки этой функции должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} yzst + \lambda = 0, \\ xzst + \lambda = 0, \\ xyst + \lambda = 0, \\ xyzt + \lambda = 0, \\ xyzs + \lambda = 0, \\ x+y+z+s+t = a. \end{cases}$$

Так как по условию задачи все числа x, y, z, s, t отличны от нуля, то можем делить уравнения системы друг на друга. Получим, что $x = y$, $y = z$, $z = s$, $s = t$. Подставляя эти результаты в последнее уравнение системы, имеем: $x = y = z = s = t = \frac{a}{5}$, $\lambda = -\frac{a^4}{625}$.

Заметим, что в данной точке действительно достигается наибольшее значение произведения $xyzst$ при имеющихся ограничениях. Действительно, мы рассматриваем функцию $f(x,y,z,s,t) = xyzst$ на части гиперплоскости $x+y+z+s+t=a$, заключенной в куб $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$, $0 \le s \le a$, $0 \le t \le a$. Это – ограниченное замкнутое множество. Значит, непрерывная функция обязана достигать на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Наибольшее значение может достигаться либо в точках условного экстремума, либо на границе. Но всюду на границе, очевидно, имеем: $f(x,y,z,s,t)=0$. Значит, наибольшее значение действительно достигается в точке $x=y=z=s=t=\frac{a}{5}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Найти точки условного экстремума следующих функций:

11.7. $f(x,y,z)=2x+y-z+1$, $x^2+y^2+2z^2=22$.

11.8. $f(x,y)=x-y$, $tgx-3tgy=0$, $|x|<\frac{\pi}{2}$, $|y|<\frac{\pi}{2}$.

11.9. $f(x,y,z)=xyz$, $x+y+z=5$, $xy+xz+yz=8$.

11.10. $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $x+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}z^3=1$,

$x>0,\ y>0,\ z>0$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области:

11.11. $f(x,y)=x^3+3y^2-3xy$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$.

11.12. $f(x,y)=x^6+y^6-3x^2+6xy-3y^2$, $0\le y\le x\le 2$.

11.13. $f(x,y,z)=xy+xz+yz$, $x^2+y^2+z^2\le a^2$.

11.14. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

11.15. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего наименьшую площадь поверхности.

ОТВЕТЫ.

11.7. $(4,2,-1)$ - *точка максимума,* $(-4,-2,1)$ - *точка минимума.*

11.8. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ - *точка максимума,* $\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right)$ - *точка минимума.*

11.9. $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ - *точки максимума,* $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$ - *точки минимума.*

11.10. $\left(\frac{1}{3},\sqrt{\frac{2}{3}},1\right)$ - *точка максимума.*

11.11. *Наибольшее значение* 8, *наименьшее* $-\frac{1}{16}$.

11.12. *Наибольшее значение* 2^7, *наименьшее* -2.

11.13. *Наибольшее значение* a^2, *наименьшее* $-\frac{a^2}{2}$.

11.14. $\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}$.

11.15. *Куб со стороной* $\sqrt[3]{V}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. В 2 ч. Часть 1. В 2 кн. Книга 1. 4-е изд. пер. и доп. Учебник для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2017.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2 ч. Часть I. М.: Физматлит, 2014.
3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. Учебник для вузов. М.: Дрофа, 2004.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3 т. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисление. МЦНМО, Изд-во МГУ, 2017.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. СПб.: Лань, 2017.
6. Никитин А.А., Фомичев В.В. Математический анализ. Углубленный курс. 2-е изд., испр. и доп. Учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2017.
7. Садовничая И.В., Фоменко Т.Н., Хорошилова Е.В. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: теория и задачи. Учебное пособие для студентов 1 курса университетов. Под ред. В.А. Ильина. М.: Издат. отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2011.
8. Садовничая И.В., Фоменко Т.Н. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: теория и задачи. Учеб. пособие для студентов 1 курса университетов. Под ред. В.А. Ильина. М.: Издат. отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2012.

НОВЫЕ ИЗДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ» И СМЕЖНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ

1. Аксенов А.П. Математический анализ. В 4 ч. Учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2017.

2. Баврин И.И. Математический анализ. Учебник и практикум для академического бакалавриата. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017.

3. Далингер В.А. Методика обучения началам математического анализа. Учебник и практикум для академического бакалавриата. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2016.

4. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Теория фупкций действительного переменного. Учебник и практикум для академического бакалавриата. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2016.

5. Капкаева Л.С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление. Учебное пособие для вузов. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017.

6. Краснова С.А., Уткин В.А. Математический анализ для экономистов. В 2 ч. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2017.

7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математический анализ. В 2 ч. Учебник и практикум для академического бакалавриата / отв. ред. Н.Ш. Кремер. М.: Издательство Юрайт, 2017.

8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Учебник для бакалавров. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017.

9. Кытманов А.М. Математический анализ. Учебное пособие для бакалавров. М.: Издательство Юрайт, 2017.

10. Логинова В.В. и др. Математический анализ. Сборник заданий. Учебное пособие для вузов / под общ. ред. Е.Г. Плотниковой. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2018.

11. Малугин В.А. Математический анализ для экономического бакалавриата. Учебник и практикум. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017.

12. Никитин А.А. Математический анализ. Сборник задач. Учебное пособие для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2017.

13. Остроградский М.В. Лекции алгебраического и трансцендентного анализа. М.: Издательство Юрайт, 2017.

14. Плотникова Е.Г. Математический анализ для экономического бакалавриата. Учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2018.

15. Потапов А.П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. В 2 ч. Учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2017.

16. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Учебник для вузов. М.: Издательство Юрайт, 2017.

17. Привалов И.И. Интегральные уравнения. Учебник для вузов. 4-е изд., стер. М.: Издательство Юрайт, 2017.

18. Привалов И.И. Ряды Фурье. Учебник для вузов. 5-е изд., стер. М.: Издательство Юрайт, 2017.

19. Рудык Б.М., Татарников О.В. Математический анализ для экономистов. Учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2017.

20. Садовничая И.В., Фоменко Т.Н. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной. Учебное пособие для академического бакалавриата / под общ. ред. В.А. Ильина. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2018.

21. Садовничая И.В., Хорошилова Е.В. Математический анализ: определенный интеграл. В 2 ч. Учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017.

22. Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу. В 2 ч. Учебник для академического бакалавриата. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2016.

23. Сухотин А.М., Тарбокова А.М. Высшая математика. Альтернативная методология преподавания. Учебное пособие для прикладного бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2016.

24. Татарников О.В. и др. Математика для экономистов. Учебник для академического бакалавриата / под общ. ред. О.В. Татарникова. М.: Издательство Юрайт, 2017.

25. Хорошилова Е.В. Математический анализ: неопределенный интеграл. Учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017.

26. Хрипунова М.Б. и др. Высшая математика. Учебник и практикум для академического бакалавриата / под общ. ред. М.Б. Хрипуновой, И.И. Цыганок. М.: Издательство Юрайт, 2017.

27. Чебышёв П.Л. Избранные труды. Анализ. М.: Издательство Юрайт, 2017.

28. Чебышёв П.Л. Математический анализ. В 2 ч. М.: Издательство Юрайт, 2017.

29. Чебышёв П.Л. Теория чисел. Теория вероятностей. Теория механизмов. М.: Издательство Юрайт, 2017.

30. Шагин В.Л., Соколов А.В. Математический анализ. Базовые понятия. Учебное пособие для прикладного бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2017.

Учебное издание

Садовничая Инна Викторовна,
Фоменко Татьяна Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебник и практикум для СПО

Формат $60\times90\,^1/_{16}$.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 12,94.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru